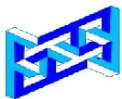


Tesi per il Corso di Laurea Magistrale in Matematica del Gruppo di Analisi Numerica

Prof.ssa D. Occorsio, Prof.ssa M.G. Russo,
Dott.ssa M.C. De Bonis, Dott.ssa C. Laurita

23 Aprile 2021



Dipartimento di Matematica, Informatica ed Economia

Università degli Studi della Basilicata



Calcolo numerico di integrali a valor principale

$$H(g, t) = \int_a^b \frac{g(x)}{x-t} dx, \quad -\infty \leq a < t < b \leq +\infty$$

e l'integrale è inteso come valore principale, cioè

$$\int_a^b \frac{g(x)}{x-t} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\left(\int_a^{t-\epsilon} + \int_{t+\epsilon}^b \right) \frac{g(x)}{x-t} dx \right].$$

Metodi numerici basati su:

- ▶ formule interpolatorie di tipo prodotto;
- ▶ formule di quadratura di tipo Gauss, dopo aver riscritto l'integrale, sotto opportune ipotesi su g , come segue

$$\int_a^b \frac{g(x)}{x-t} dx = \int_a^b \frac{g(x) - g(t)}{x-t} dx + g(t) \int_a^b \frac{dx}{x-t}.$$

Calcolo numerico di integrali a parte finita secondo Hadamard

$$H_p(g, t) = \rlap{-}\int_a^b \frac{g(x)}{(x-t)^{p+1}} dx, \quad -\infty \leq a < t < b \leq +\infty, \quad p \in \mathbb{N}$$

Prima definizione data da Hadamard nel 1923

$$\begin{aligned} \rlap{-}\int_a^b \frac{dx}{(x-t)^{p+1}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{t-\varepsilon} \frac{dx}{(x-t)^{p+1}} + \int_{t+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-t)^{p+1}} \right) \\ &- \frac{1 - (-1)^p}{p\varepsilon^p} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{(a-t)^p} - \frac{1}{(b-t)^p} \right) \end{aligned}$$

$$\rlap{-}\int_a^b \frac{g(x)}{(x-t)^{p+1}} dx := \frac{1}{p!} \frac{d^p}{dt^p} \int_a^b \frac{g(x)}{x-t} dx$$

Calcolo numerico di integrali a parte finita secondo Hadamard

$$H_p(g, t) = \int_a^b \frac{g(x)}{(x-t)^{p+1}} dx, \quad -\infty \leq a < t < b \leq +\infty, \quad p \in \mathbb{N}$$

Metodi:

- ▶ basati su formule interpolatorie di tipo prodotto;
- ▶ basati su formule di quadratura di tipo Gauss;
- ▶ per l'approssimazione simultanea di $H_p(g, t)$ per diversi valori p mediante opportuni polinomi di Lagrange;
- ▶ “fast” basati sull'interpolazione estesa.

Formule di cubatura non tensoriali

$$\int_S f(x, y)h(x, y)w(x, y)dx dy$$

dove S un dominio del piano, limitato o meno, $w(x, y)$ è una funzione peso e $h(x, y)$ è una funzione abbastanza regolare.

La funzione f viene approssimata mediante opportuni operatori di tipo polinomiale, detti operatori di **iperinterpolazione** basati su set di nodi ottimali (per esempio punti di Padova).

Al variare di S , w e del set di nodi si ottengono differenti schemi di cubatura.

Risoluzione numerica di equazioni integrali di Fredholm in 2D

$$f(x) - \lambda \int_D k(x, y) f(y) dy = g(x), \quad y \in D,$$

dove

- ▶ $D = [-1, 1]^2$;
- ▶ $D = [0, +\infty)^2$;
- ▶ $D = \mathbb{R}^2$;
- ▶ $D = [0, +\infty) \times [-1, 1]$ o $D = [-1, 1] \times [0, +\infty)$;
- ▶ $D = (-\infty, +\infty) \times [-1, 1]$ o $D = [-1, 1] \times (-\infty, +\infty)$;

Risoluzione numerica di equazioni integrali di Fredholm in 2D

Metodi di tipo Nyström:

- ▶ basati su formule di cubatura di tipo interpolatorio su griglie di zeri di polinomi ortogonali;
- ▶ basati su formule di cubatura costruite su griglie di punti equispaziati se $D = [-1, 1]^2$.

Risoluzione numerica di sistemi di equazioni integrali di Fredholm di seconda specie

$$f_r(x) - \lambda \sum_{s=1}^n \int_a^b k^{r,s}(x,y) f_s(y) dy = g_r(x), \quad -\infty \leq a < x < b \leq +\infty,$$

$$r = 1, \dots, n,$$

Ci si può ricondurre ad un sistema di equazioni integrali anche quando si ha una equazione integrale di Fredholm

$$f(x) - \lambda \int_{\Gamma} k(x,y) f(y) dy = g(x), \quad y \in \Gamma,$$

- ▶ Γ è un intervallo limitato o illimitato e $k(x,y)$ con singolarità interne all'intervallo;
- ▶ Γ è unione di curve regolari disgiunte.

Risoluzione numerica di sistemi di equazioni integrali di Fredholm di seconda specie

Metodi numerici di tipo Nyström per approssimare le soluzioni del sistema nei seguenti casi:

- ▶ intervallo di integrazione limitato e $k(x, y)$ con singolarità agli estremi dell'intervallo;
- ▶ intervallo di integrazione illimitato e $k(x, y)$ decrescente all'infinito;
- ▶ intervallo di integrazione limitato o illimitato e $k(x, y)$ debolmente singolare.

Risoluzione numerica di equazioni integro-differenziali di tipo Prandtl

$$\sigma(y)\zeta(y) + a\zeta'(y) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\zeta'(x)}{x-y} dx + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(x,y)\zeta(x) dx = g(y), \quad y \in (-1, 1)$$

con $\sigma(y)$, $k(x,y)$ e $g(y)$ funzioni date, $a, b \in \mathbb{R}$ costanti tali che $a^2 + b^2 = 1$ e la soluzione incognita ζ è una funzione differenziabile soddisfacente le seguenti condizioni

$$\zeta(-1) = \zeta(1) = 0$$

È ben nota in **aerodinamica** perchè la **soluzione ζ** rappresenta la **circolazione del flusso d'aria lungo il contorno dell'ala di un aeroplano**.
Metodi numerici di collocazione discreta.

Risoluzione numerica di sistemi di equazioni integrali con nuclei singolari di Cauchy

$$a_j F_j(\tau) + \frac{b_j}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F_j(t)}{t - \tau} dt + \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 h_{jk}(\tau, t) F_k(t) dt = G_j(\tau), \quad |\tau| < 1,$$

$j = 1, \dots, n$

Ci si può ricondurre al sistema nella risoluzione di equazioni integrali della seguente forma

$$au(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{M(x, y)}{y - x} u(y) dy = g(x), \quad x \in \Gamma,$$

dove $\Gamma = \bigcup_{j=1}^n \Gamma_j$ è l'unione di n archi Γ_j di lunghezza finita del piano

complesso non aventi punti in comune.

Metodi numerici di collocazione discreta.

Risoluzione numerica di equazioni di Volterra

$$f(t) - \int_0^t k(s,t)f(s) ds = g(t),$$

con $t \in [0, T]$, $T > 0$ o $t \in [0, +\infty)$.

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} f''(t) - a(t)f(t) = h(t), & t \in [0, b], \\ f(0) = 0, \quad f'(b) = 0 \end{cases}$$

può essere ricondotto ad un'equazione lineare di Volterra di seconda specie con

$$k(s,t) = (s-t)a(t) \quad \text{e} \quad g(t) = \int_a^t (s-t)h(s)ds.$$

Risoluzione numerica di equazioni di Volterra

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} [g(x) \rho(x, t)] = 0, & x \in [1, b), t \geq 0 \\ g(1) \rho(1, t) = \beta(x_p(t)) + \int_1^b \beta(x) \rho(x, t) dx, & t \in (0, +\infty), \\ \rho(x, 0) = 0, & x \in [1, b). \end{cases}$$

descrive la crescita delle **metastasi di un tumore**.

La soluzione incognita $\rho(x, t)$ permette di calcolare:

- ▶ $M(t) = \int_1^b x \rho(x, t) dx$ dimensione in cellule della massa
- ▶ $N(t) = \int_1^b \rho(x, t) dx$ numero totale di metastasi
- ▶ $N_c(t) = \int_c^b \rho(x, t) dx$ numero di metastasi di dimensione $> c$

Risoluzione numerica di equazioni integrali al contorno derivanti da problemi differenziali

Problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

Dato un dominio piano limitato e aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ la cui frontiera Γ è una curva regolare, il problema consiste nel determinare la funzione $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ che soddisfa alla seguente equazione differenziale alle derivate parziali di tipo ellittico

$$\Delta u(A) = 0, \quad A \in \Omega \quad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

e alla seguente **condizione al contorno**

$$u(P) = f(P), \quad P \in \Gamma$$

dove $f \in C(\Gamma)$ è una funzione nota.

Risoluzione numerica di equazioni integrali al contorno derivanti da problemi differenziali

Rappresentando la soluzione $u(A)$ nella forma di un **potenziale di doppio strato** come segue

$$u(A) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} \log |A - Q| \rho(P) d\Gamma_Q, \quad A \in \Omega \quad (1)$$

si perviene alla risoluzione della seguente **equazione integrale al contorno**

$$-\pi \rho(P) + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} (\log |P - Q|) \rho(P) d\Gamma_Q = f(P), \quad P \in \Gamma$$

definita sulla frontiera Γ del dominio piano Ω .

La sua soluzione è la funzione $\rho(P)$ detta **funzione di densità**, nota la quale è possibile ricavare mediante la (1) la soluzione $u(A)$ del problema differenziale iniziale.

La compressione delle immagini

Una **immagine in bianco e nero** di $m \times n$ pixel viene memorizzata come una **matrice** $m \times n$ di numeri interi compresi tra 0 e 255.

Ciascun numero intero rappresenta l'**intensità di grigio del pixel**, dove lo 0 corrisponde al nero e il 255 al bianco.

In una rappresentazione a 8 bit, il modello è quello di una funzione $f(x, y)$ tale che

$$z_i = f(x_i, y_i), \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, \quad 0 \leq z_i \leq 255, z_i \in \mathbb{N}$$

In maniera analoga, una **immagine a colori** formata da $m \times n$ pixel viene memorizzata in una **matrice tridimensionale** $m \times n \times 3$ (modalità **RGB** (Red Green Blue)).

Compressione mediante *DCT*

Comprimere una immagine senza perdere troppo nella resa, è di interesse nella trasmissione delle immagini.

Dopo un opportuno passaggio dal dominio spaziale al dominio delle frequenze, il **formato JPEG** effettua una compressione basata sulla trasformata discreta di Fourier di soli coseni o **DCT** (Discrete Cosine Transform).

Altre tecniche di compressione si possono ottenere applicando altri operatori interpolanti.

Riepilogo

- ▶ Calcolo numerico di integrali a valor principale (Occorsio-Russo-De Bonis-Laurita)
- ▶ Calcolo numerico di integrali a parte finita secondo Hadamard (Occorsio-De Bonis)
- ▶ Formule di cubatura non tensoriali (Russo)
- ▶ Risoluzione numerica di equazioni integrali di Fredholm in 2D (Occorsio-Russo)
- ▶ Risoluzione numerica di sistemi di equazioni integrali di Fredholm di seconda specie (Occorsio-Russo-De Bonis-Laurita)
- ▶ Risoluzione numerica di equazioni integro-differenziali di tipo Prandtl (Occorsio-De Bonis)
- ▶ Risoluzione numerica di sistemi di equazioni integrali con nuclei singolari di Cauchy (De Bonis-Laurita)
- ▶ Risoluzione numerica di equazioni di Volterra (De Bonis-Laurita)
- ▶ Risoluzione numerica di equazioni integrali al contorno derivanti da problemi differenziali (Laurita)
- ▶ La compressione delle immagini (Occorsio)