Giornata di Orientamento Tesi

23/04/2021

Laurea Magistrale in Matematica

Antonio Azzollini

Equazioni differenziali alle derivate parziali

Una equazione differenziale alle derivate parziali (EDP) consiste in una equazione differenziale in cui l'incognita è una funzione in più variabili e le derivate coinvolte sono, per l'appunto, quelle parziali.

Equazioni differenziali alle derivate parziali

Le equazioni EDP possono essere classificate in vari modi.

Una possibile classificazione: l'ordine

- Equazioni del primo ordine. Esempio: equazione di continuità

  determinare $\varphi(t, x_1, x_2, x_3)$ $t.c.$ $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\varphi \mathbf{v}) = 0$ $\left(\text{qui} \nabla \cdot (\varphi \mathbf{v}) = \sum_{i=k}^{3} \dfrac{\partial(\varphi v_k)}{\partial x_k} \right)$

- Equazione del secondo ordine. Esempio: equazione del calore

  determinare $u(t, x_1, x_2, x_3)$ $t.c.$ $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ $\left(\text{qui } \Delta u = \sum_{k=1}^{3} \dfrac{\partial^2 u}{(\partial x_k)^2} \right)$

e così via…

Equazioni differenziali alle derivate parziali

Un'altra possibile classificazione: lineari/non lineari

- Equazioni lineare.

  Esempio: equazione di Schrödinger $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi = 0$

- Equazione non lineare:

  Esempio: equazione del trasporto non lineare $\frac{\partial u}{\partial t} + c(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

Equazioni differenziali alle derivate parziali

Infine, una classificazione molto utile che interviene spesso, riguarda la natura dell' "operatore differenziale".

La introduciamo in una situazione particolare: consideriamo l'equazione differenziale del secondo ordine semilineare (nel senso che la dipendenza non lineare da u non è presente né nelle derivate di ordine massimo, né nei relativi coefficienti)

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y,u) \quad (1)$$

Equazioni differenziali alle derivate parziali

Assumiamo che i coefficienti a, b e c siano funzioni continue, definite in $I \times J$.

Consideriamo la matrice

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} a(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & c(x, y) \end{pmatrix}$$

Distinguiamo 3 casi:

1. $\det A > 0$, ed allora (1) si dice "ellittica"
2. $\det A = 0$, ed allora (1) si dice "parabolica"
3. $\det A < 0$, ed allora (1) si dice "iperbolica"

Equazioni differenziali alle derivate parziali

Naturalmente i casi non sono esaustivi, considerato che $\det A$ potrebbe cambiare segno in $I \times J$. Per questo la natura dell'equazione potrebbe cambiare di punto in punto.

Considerando operatori del secondo ordine lineari a coefficienti costanti, la precedente classificazione avrà carattere globale.

Equazioni differenziali alle derivate parziali

L'equazione

$$a\frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y,u) \qquad (2)$$

si dice

1. ellittica se $ac - b^2 > 0$,
2. parabolica se $ac - b^2 = 0$,
3. iperbolica se $ac - b^2 < 0$.

Equazioni differenziali alle derivate parziali

Consideriamo l'equazione (2) per questi valori dei coefficienti

- $a = -1$,
- $b = 0$,
- $c = -1$,
- $d \equiv 0$,
- $e \equiv 0$,

e $f(x, y, s) = -\lambda s + |s|^{p-2} s$ con $\lambda > 0$ e $p > 2$.

Equazioni differenziali alle derivate parziali

L'equazione (2) diventa

$$-\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u \tag{3}$$

che è un esempio di equazione del secondo ordine ellittica semilineare.

L'equazione (3) ha senso anche in $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 2$, ed una soluzione è una funzione $u \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$,

$$-\Delta u(x) + \lambda u(x) = |u(x)|^{p-2}u(x).$$

Formulazione debole di una EDP

Se u è soluzione di (3), evidentemente $\forall \varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continua

$$-\Delta u \varphi + \lambda u \varphi = |\, u \,|^{p-2} u \varphi$$

e quindi, $\forall \varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continua,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta u(x)\varphi(x) + \lambda u(x)\varphi(x))\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\, u(x) \,|^{p-2} u(x)\varphi(x)\, dx. \qquad (4)$$

Formulazione debole di una EDP

Se consideriamo funzioni $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ a supporto compatto, la (4) è equivalente alla seguente

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) + \lambda u(x)\varphi(x))\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} | u(x) |^{p-2} u(x)\varphi(x)\, dx \quad (5)$$

grazie alla integrazione per parti.

Osserviamo che (5) ha senso anche se $u \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

Formulazione debole di una EDP

Per formulare il problema (5), non serve esistenza puntuale delle derivate prime, ma solo una condizione di integrabilità sulla funzione e sulle loro derivate (distribuzionali). L'equazione (5) è ben definita anche per $u, \varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ (a patto di scegliere opportunamente p).

Se $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ soddisfa (5) per ogni $\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ a supporto compatto, allora u viene detta "soluzione debole della equazione".

Formulazione debole di una EDP

In sintesi il problema che ci poniamo è di individuare $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, tale che per ogni $\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) + \lambda u(x)\varphi(x))\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p-2} u(x)\varphi(x)\, dx \quad (5)$$

Strategia:

1. cerco una soluzione u di (5) in $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$,
2. indago le proprietà di regolarità di u allo scopo di mostrare che risolve $-\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2} u$ in senso classico.

Metodi variazionali applicati alle EDP ellittiche semilineari

Introduciamo il funzionale

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u(x)|^2 + \lambda u^2(x))\, dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p\, dx$$

che, sotto opportune ipotesi su p, è continuo dallo spazio di Hilbert $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ in $\mathbb{R}$.

Sviluppando una teoria di calcolo differenziale su funzionali definiti in spazi di Hilbert, si introduce il concetto di differenziale dJ del funzionale J e si prova che…

Metodi variazionali applicati alle EDP ellittiche semilineari

$$u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \text{ e } dJ(u) = 0 \iff \text{u è soluzione di (5)}$$

Il problema di risolvere una EDP (almeno in senso debole) è così ricondotto a quello di trovare i cosiddetti "punti critici del funzionale J".

Metodi variazionali applicati alle EDP ellittiche semilineari

I problemi differenziali che possono essere trattati attraverso questo approccio si dicono “problemi variazionali”, e le tecniche attraverso cui si cercano punti critici del funzionale si dicono “metodi variazionali”.

Metodi variazionali applicati alle EDP ellittiche semilineari

Esempi di metodi variazionali

- ricerca di minimi liberi o minimi vincolati (ad opportune varietà) del funzionale associato al problema (Teorema di Weierstrass)
- ricerca di punti di sella del funzionale (Teorema del passo montano di Ambrosetti-Rabinowitz, teoremi di linking…)

Una recente applicazione dei metodi variazionali ai sistemi di EDP

Sistema accoppiato Schrödinger-Maxwell in $\mathbb{R}^3$, caso elettrostatico

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u + q\phi u = |u|^{p-2} u \text{ in } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = q u^2 \text{ in } \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

con $\lambda > 0$, $q > 0$ e $2 < p < 6$.

Il funzionale associato è

$$J_q(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u(x)|^2 + \lambda u^2(x))\, dx + \frac{q}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2(x)u^2(y)}{|x-y|}\, dx\, dy - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^p\, dx$$

Una recente applicazione dei metodi variazionali ai sistemi di EDP

Sistema accoppiato Schrödinger-Maxwell in $\mathbb{R}^2$, caso elettrostatico

$$\begin{cases} -\Delta u + (1+|x|^\alpha)u + q\phi u = \pm |u|^{p-2}u \text{ in } \mathbb{R}^2, \\ -\Delta\phi = qu^2 \text{ in } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

con $q > 0$ $\alpha > 0$, e $2 < p$.

Il funzionale associato è

$$J_q(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u(x)|^2 + (1+|x|^\alpha)u^2(x))\,dx + \frac{q}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \log(|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy \mp \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^p\,dx.$$