Proposte tesi magistrali in Analisi Matematica

Prof.ssa Vita Leonessa

Presentazione orientamento tesi per i Corsi di Laurea in Matematica
1° marzo 2024

Criteri di compattezza

Sia X uno spazio topologico compatto e sia $\mathscr{C}(X)$ lo spazio delle funzioni continue su X, munito della norma uniforme.

Si andrà alla ricerca di condizioni necessarie e sufficienti affinché un sottoinsieme di $\mathscr{C}(X)$ sia compatto.

Teoremi di questo tipo sono detti anche teoremi alla Ascoli-Arzelà ed un loro interesse applicativo è quello di assegnare una successione di funzioni e dire sotto quali condizioni questa ammetta una sottosuccessione convergente.

Teoremi di punto fisso

Sia E uno spazio normato e sia K un sottoinsieme non vuoto di E.

Sia poi A :K→K un'applicazione.

Un punto fisso per A è un elemento u di K tale che A(u)=u.

Siamo qui interessati a vedere sotto quali ipotesi A ammette almeno un punto fisso.

Teoremi di questo tipo sono:

- il teorema di Banach (E spazio di Banach, K chiuso, A contrazione)
- il teorema di Brouwer (E spazio normato di dimensione finita, K convesso e compatto, A continua)
- Il teorema di Schauder (E spazio normato, K convesso chiuso e limitato, A compatta)
- il teorema di Leray-Schauder (E spazio normato, K=E, stime a priori)

Criteri di densità

Assegnato un sottoinsieme A di $\mathscr{C}_0(X)$ (con X localmente compatto) stabilire sotto quali condizioni A è denso in $\mathscr{C}_0(X)$.

In tal caso si parla di teoremi di tipo Stone-Weierstrass.

L'interesse applicativo di questo tipo di risultati è il seguente: assegnata f in $\mathscr{C}_0(X)$, vedere se esiste una successione in A che converge ad f uniformemente.

Oltre che sull'esistenza, ci si potrebbe concentrare anche su risultati "costruttivi" della successione approssimante.

Teoremi di tipo Korovkin

Sia X uno spazio localmente compatto e separato e sia $\mathscr{C}_0(X)$ lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto.

Un operatore lineare T: $\mathscr{C}_0(X) \to \mathscr{C}_0(X)$ si dice positivo se mappa funzioni non negative in funzioni non negative.

Data una successione (L_n) di operatori lineari e positivi, diremo che costituisce un processo di approssimazione se per ogni funzione f in $\mathscr{C}_0(X)$ si ha che $L_n(f) \to f$ uniformemente su X.

I teoremi di tipo Korovkin sono teoremi di approssimazione che forniscono criteri piuttosto “economici” per stabilire se una successione di operatori lineari e positivi costituiscono un processo di approssimazione nello spazio $\mathscr{C}_0(X)$.

Tali teoremi si applicano con successo a diversi processi di approssimazione di cui si vedrà la costruzione.

Spazi di Orlicz

Gli spazi di Orlicz sono spazi funzionali che forniscono una maggiore generalità del contesto in cui si lavora rispetto ai ben noti spazi di Lebesgue, di cui si ricorda qui la definizione: dato uno spazio di misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e un numero reale $1 \leq p \leq +\infty$,

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu)=\{f\colon X \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ misurabile con } |f|^p \text{ sommabile rispetto a } \mu\} \quad \text{se } 1 \leq p < +\infty,$$

$$L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)=\{f\colon X \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ misurabile con } |f| \leq M \text{ q.o. su } X, \text{ per qualche } M>0\}.$$

Il nome di tali spazi si deve al matematico che nel 1931 fornì la prima estensione degli spazi $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ con $1 \leq p < +\infty$, definendo uno spazio normato più generale L^φ dove φ è un'opportuna funzione che gioca il ruolo della potenza p-esima e che risulta cruciale per estendere tutte le proprietà degli spazi di Lebesgue.

Contatti:

Vita Leonessa

Professoressa Associata in Analisi Matematica

vita.leonessa@unibas.it
sito web

GRAZIE PER L’ATTENZIONE!