

Teoria della Misura e Topologia Generale

Anna Avallone e Paolo Vitolo

Giornata di Orientamento sulle Tesi di Laurea,
1 marzo 2024

Outline

- 1 Teoria della Misura
 - La Teoria della Misura “classica”
 - Generalizzazione della Teoria della Misura

- 2 Topologia Generale
 - Alcuni concetti fondamentali
 - Spazi separati e spazi metrizzabili

Algebre di insiemi

Definizione

Un'algebra di insiemi è una collezione \mathcal{A} di sottoinsiemi di un fissato insieme E tale che

- $E \in \mathcal{A}$
- $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Se \mathcal{A} è un'algebra di insiemi, $\emptyset \in \mathcal{A}$; inoltre, per ogni $A, B \in \mathcal{A}$ si ha $A \cap B \in \mathcal{A}$ e $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Per ogni collezione \mathcal{S} di sottoinsiemi di E , esiste sempre la più piccola algebra contenente \mathcal{S} (algebra generata).

Misure

Indicheremo con $(\mathbb{G}, +, 0)$ un gruppo abeliano (topologico).

Definizione

Una **misura** sull'algebra \mathcal{A} è un'applicazione $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{G}$ tale che

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \quad \mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B).$$

Sia $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{G}$ una misura. Per ogni $A, B \in \mathcal{A}$, si ha:

- 0 $\mu(\emptyset) = 0;$
- 1 $B \subseteq A \implies \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A);$
- 2 $A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B);$
- 3 $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$

Misure σ -additive

Definizione

Un'algebra \mathcal{A} in cui per ogni successione $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{A} si ha

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ si dice **σ -algebra**.

Ciò equivale a dire che per ogni successione $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{A} si ha

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Definizione

Se \mathcal{A} è una σ -algebra, una misura $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{G}$ si dice **σ -additiva**

se per ogni successione disgiunta $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{A}

si ha $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$.

Ciò equivale a dire che per ogni successione decrescente $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{A}

con $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0$.

Algebre generalizzate

- A : un insieme non vuoto;
- \setminus : un'operazione su A (**differenza**);
- 0 : un elemento di A (**zero**).

- 0 ponendo $a \leq b \iff a \setminus b = 0$ si ottiene una relazione di **ordine**;
- 1 $a \setminus (b \setminus a) \leq a$;
- 2 $a \setminus ((a \setminus b) \setminus (b \setminus a)) = a \wedge b = \inf\{a, b\}$;
- 3 $(a \setminus b) \setminus (c \setminus b) = (a \setminus c) \setminus (b \setminus c)$;
- 4 $(a \setminus b) \setminus a = (b \setminus a) \setminus ((b \setminus a) \wedge b)$ e $a \setminus (a \setminus b) = b \setminus ((b \setminus a) \wedge b)$.

Se $\exists \max A$ e se $\forall a, b$ si ha $a \setminus b \leq a$ e $(a \setminus b) \setminus b = a \setminus b$,
 A può essere identificata con un'algebra di insiemi.

Misure su algebre generalizzate

Scriveremo $a \perp b$ se $\exists c$ tale che $b \leq c$ e $c \setminus b = a$.

In tal caso c è unico e verrà indicato con $a \oplus b$.

Consideriamo un'applicazione $\mu: A \rightarrow \mathbb{G}$ tale che

$$\forall a, b \in A \quad \mu(a) = \mu(a \setminus b) + \mu(a \wedge b).$$

Per ogni $a, b \in A$ si ha:

- 0 $\mu(0) = 0$;
- 1 $b \leq a \implies \mu(b \setminus a) = \mu(a) - \mu(a)$;
- 2 $a \perp b \implies \mu(a \oplus b) = \mu(a) + \mu(b)$;
- 3 $\exists a \vee b = \sup\{a, b\} \implies \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b) = \mu(a) + \mu(b)$.

Spazi topologici

Uno **spazio topologico** è un insieme X dotato di una collezione \mathcal{S} di sottoinsiemi di X (detta topologia) con le seguenti proprietà:

- $\emptyset, X \in \mathcal{S}$;
- $\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S} \quad \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{S}$;
- $\forall A, B \in \mathcal{S} \quad A \cap B \in \mathcal{S}$.

Chiamiamo **punti** gli elementi di X , e **aperti** gli elementi di \mathcal{S} .

Si dice che $C \subseteq X$ è **chiuso** se il complementare $X \setminus C$ è aperto.

Diciamo che $U \subseteq X$ è **intorno** di $p \in X$ se $\exists A \in \mathcal{S} \quad p \in A \subseteq U$.

Dato $E \subseteq X$, la **chiusura** \bar{E} di E è l'intersezione di tutti i chiusi che contengono E .

Collezioni di aperti

Una collezione \mathcal{D} di aperti dello spazio topologico (X, \mathcal{S}) è detta:

- **discreta**, se ogni punto $x \in X$ ha un intorno U tale che l'intersezione $U \cap D$ è non vuota al più per un elemento $D \in \mathcal{D}$;
- **localmente finita**, se ogni punto $x \in X$ ha un intorno U tale che l'intersezione $U \cap D$ è non vuota al più per un numero finito di elementi $D \in \mathcal{D}$.

È evidente che: discreta \implies localmente finita.

Se \mathcal{D} è localmente finita si ha $\overline{\bigcup \mathcal{D}} = \bigcup \{ \overline{D} \mid D \in \mathcal{D} \}$.

Una **base** per lo spazio topologico (X, \mathcal{S}) è una collezione \mathcal{B} di aperti tale che ogni aperto $A \in \mathcal{S}$ è l'unione di una sottocollezione di \mathcal{B} .

Spazi separati e spazi regolari

Uno spazio topologico (X, \mathcal{S}) si dice **separato**, o **di Hausdorff**, se per ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$ esistono $U, V \in \mathcal{S}$ tali che $x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Se (X, \mathcal{S}) è separato, per ogni $p \in X$ l'insieme $\{p\}$ è chiuso.

Uno spazio topologico separato (X, \mathcal{S}) si dice **regolare** se per ogni $a \in X$ e ogni chiuso $C \subseteq X$, con $a \notin C$, esistono $U, V \in \mathcal{S}$ tali che $a \in U, C \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Uno spazio separato è regolare se e solo se per ogni $a \in X$ e ogni intorno G di a esiste un intorno H di a tale che $\overline{H} \subseteq G$.

La retta reale \mathbb{R} , con la topologia usuale (di cui gli intervalli aperti costituiscono una base), è uno spazio regolare.

Spazi metrici e metrizzabilità

Diciamo che (X, d) è uno **spazio metrico** se X è un insieme e d è una **metrica** su X , cioè una funzione $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- $\forall x, y \in X \quad [d(x, y) = 0 \iff x = y]$;
- $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$;
- $\forall x, y, z \in X \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Gli insiemi della forma $B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$, al variare di $x \in X$ e di $\varepsilon > 0$, costituiscono una base per una topologia $\mathcal{T}(d)$ su X che si dice indotta dalla metrica d .

Uno spazio topologico (X, \mathcal{S}) si dice **metrizzabile** se esiste una metrica d su X tale che $\mathcal{S} = \mathcal{T}(d)$.

La retta reale è uno spazio topologico metrizzabile: possiamo infatti considerare la metrica d data da $d(x, y) = |x - y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Teoremi di metrizzazione

Ogni spazio metrizzabile è regolare.

Teorema di metrizzazione di Urysohn

Uno spazio regolare che abbia una base numerabile è metrizzabile.

Teorema di metrizzazione di Bing

Uno spazio topologico è metrizzabile se e solo se è regolare e ha una base della forma $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$ dove ogni \mathcal{D}_n è discreta.

Teorema di metrizzazione di Nagata–Smirnov

Uno spazio topologico è metrizzabile se e solo se è regolare e ha una base della forma $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$ dove ogni \mathcal{D}_n è localmente finita.