Spazi di Hilbert a Nucleo Riproducente

Alcune proposte per la tesi di Laurea Magistrale in Analisi Funzionale

Francesco Esposito

Dipartimento di Matematica, Informatica ed Economia

f.esposito@unibas.it

01/03/2024

Giornata di Orientamento Tesi 2024

Sia F una classe di funzioni definite su un insieme E munita della struttura di spazio di Hilbert sul campo (reale o complesso) $\mathbb{K}$. Indichiamo con $(\cdot,\cdot)_F$ il prodotto scalare in F.

Definizione

Un **nucleo riproducente** K è un'applicazione

$$K : E \times E \to \mathbb{K}$$

tale che $K(\cdot, x) \in F$ per ogni $x \in E$ e

$$f(x) = \big(f, K(\cdot, x)\big)_F \tag{1}$$

per ogni $f \in F$ e $x \in E$.

La proprietà (1) è detta **proprietà riproducente** di K.

Definizione

Uno spazio di Hilbert F che ammette un nucleo riproducente K è detto **spazio di Hilbert a nucleo riproducente** (RKHS).

La proprietà (1) è detta **proprietà riproducente** di K.

Definizione

Uno spazio di Hilbert F che ammette un nucleo riproducente K è detto **spazio di Hilbert a nucleo riproducente** (RKHS).

Un esempio

Un classico esempio di spazio di Hilbert a nucleo riproducente (dovuto a S. Bergman) è lo spazio $L^2H(\Omega)$ delle funzioni in $L^2(\Omega)$ (definite su un dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{C}^n$) che ammettono un rappresentate olomorfo. Per tali funzioni esiste un nucleo riproducente noto come **nucleo di Bergman**.

L'insieme dei segnali la cui trasformata di Fourier è *"a banda limitata"* costituisce un altro esempio di RKHS:

Teorema

Sia H l'insieme delle $f \in L^2(\mathbb{R})$ tali che la trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i\omega t}\, d\,\mathrm{m}_1(t)$$

si annulla q. o. fuori da $(-\pi\,,\,\pi)$. Allora H è uno spazio di Hilbert con nucleo riproducente

$$K(s,\ t) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\,\dfrac{\sin\left[\pi(t-s)\right]}{\pi(t-s)} & |s| < \pi \\ \\ 0 & |s| \geq \pi \end{cases}.$$

Consideriamo uno spazio di Hilbert a nucleo riproducente (F, K) di funzioni definite su un insieme E. Per ogni sottoinsieme $X \subset E$ consideriamo lo spazio di Hilbert $(F(X), (\cdot, \cdot)_X)$ delle funzioni su X tali che

a. se $f \in F$, allora $f_{|_X} \in F(X)$;
b. l'operatore lineare $R : F \to F(X)$, $f \mapsto f_{|_X}$ è continuo.

Problema della migliore approssimazione

Dato un elemento $g \in F(X)$, quando esiste la **migliore approssimazione** $\gamma \in F$ di g, ossia un elemento $\gamma \in F$ tale che

$$\inf_{f \in F} \|Rf - g\|_X = \|R\gamma - g\|_X\,?$$

E se esiste, come trovarla?

Sia (F, K) uno spazio di Hilbert a nucleo riproducente. Gli algoritmi che sfruttano i nuclei riproducenti sono detti **metodi "Kernel"**. Se ad esempio, in un metodo kernel si considerano alcuni dati $\{(x_j, y_j) \,:\, 1 \leq j \leq N\}$, una funzione $\Omega : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ strettamente crescente e c una "funzione costo", allora un elemento $f \in F$ che minimzza

$$c((x_1, y_1, f(x_1)), \ldots, (x_N, y_N, f(x_N)) + \Omega(\|f\|)$$

ammette una rappresentazione della forma

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j K(x, x_j)$$

per qualche costante α_j.

Macchine a Vettori di Supporto (SVM)

Le **macchine a vettori di supporto** (SVM) sono paradigmi all'interno della teoria del Machine Learning per la risoluzione di problemi di **classificazione** e di **regressione** (stima di una funzione reale a partire da alcuni dati noti).

Considerato l'insieme dei dati $\mathcal{X} \times \mathcal{R}$, si introduce una **"feature map"** $\Phi : \mathcal{X} \to H$ che immerge i dati in uno spazio di Hilbert H (detto **"feature space"**). Lo spazio H si organizza quindi come RKHS considerando il nucleo K definito da

$$K(x, y) = (\Phi(x), \Phi(y))$$

e pertanto i problemi proposti si possono risolvere utilizzando metodi kernel.

Alcuni Riferimenti bibliografici

Per ulteriori informazioni si possono leggere i due articoli di rassegna:

[1] N. Aronszajn, "Theory of reproducing kernels," *Transactions of the American mathematical society*, vol. 68, no. 3, pp. 337–404, 1950.

[2] T. Matsuura and S. Saitoh, "What is a reproducing kernel?-some essences for the new journal," *International Journal of Reproducing Kernels*, vol. 1, p. 63, 2022.

Conclusione

In [1] è presente una panoramica generale della teoria degli spazi di Hilbert a nucleo riproducente.

In [2] sono indicati altri ambiti della matematica (Teoria della probabilità, Teoria delle equazioni differenziali,...) in cui compaiono gli spazi di Hilbert a nucleo riproducente (oltre a quelli già citati): tali argomenti possono costituire oggetto di tesi.

Per ulteriori informazioni, gli studenti sono incoraggiati a scrivere all'indirizzo

f.esposito@unibas.it