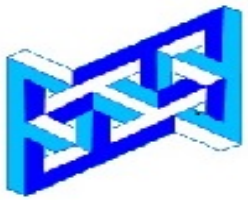
Giornata Orientamento Tesi per i Corsi di Laurea in Matematica

Proposte di tesi per la Laurea Triennale

in

Analisi Numerica

23 Aprile 2021



Dipartimento di Matematica, Informatica ed Economia

Università degli Studi della Basilicata

Argomenti di Analisi Numerica

- Algebra lineare numerica
- Approssimazione di funzioni e dati
- Risoluzione di equazioni e sistemi non lineari
- Integrazione numerica

Docenti di Analisi Numerica

- Dott.ssa Maria Carmela De Bonis
- Dott.ssa Concetta Laurita
- Prof.ssa Donatella Occorsio

Fattorizzazioni di matrici

$$A = BC, \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \in \mathbb{R}^{m\times r},\ C \in \mathbb{R}^{r\times n}$$

- Fattorizzazione LU

  $A = LU \qquad \longleftrightarrow \qquad$ Metodo di Gauss

- Fattorizzazione di Cholesky

  $A = LL^T \qquad \longleftrightarrow \qquad$ Metodo di Cholesky

- Fattorizzazione QR

  $A = QR \qquad \longleftrightarrow \qquad$ Metodo di Householder

  $A = QR \qquad \longleftrightarrow \qquad$ Metodo di Givens

- Decomposizione ai valori singolari (SVD)

  $A = U\Sigma V^T$

Metodi numerici per la risoluzione di sistemi lineari determinati

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$$

- A matrice di grandi dimensioni
  - Metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel
  - Metodi di rilassamento
  - Metodo del gradiente coniugato
- A matrice strutturate a blocchi
  - Metodo di Gauss a blocchi
  - Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel a blocchi
  - Metodi di rilassamento a blocchi

Metodi numerici per la risoluzione di sistemi lineari sovradeterminati

Un sistema lineare sovradeterminato è un sistema del tipo

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \qquad m > n.$$

Se il sistema non ha soluzione, si ricercano i vettori $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2 = \min_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n} \|A\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\|_2.$$

Tale problema viene detto problema lineare dei minimi quadrati.

- Metodo delle equazioni normali (Fattorizzazione di Cholesky)
- Metodo QR (Fattorizzazione QR)
- Metodo SVD (Decomposizione ai valori singolari)

Calcolo di autovalori e autovettori di una matrice

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- Metodo QR (Fattorizzazione QR)
- Metodo delle potenze
  - Calcolo dell'autovalore di massimo modulo
  - Calcolo dell'autovalore di minimo modulo
- Varianti del metodo delle potenze
  - Metodo delle iterazioni del quoziente di Rayleigh
  - Variante della deflazione
- Metodi per il calcolo di autovalori per matrici simmetriche
  - Metodo di Jacobi
  - Metodo delle successioni di Sturm
  - Metodo di Lanczos

Calcolo di autovalori-autovettori di una matrice ed applicazioni nei processi di ranking

Il sistema di produzione di un elenco ordinato di siti viene detto ranking.

La tecnica di ranking di Google è il PageRank.

A ciascuna pagina web viene assegnato in maniera statica un punteggio che dipende da

- numero dei link in essa contenuti (*outlinks*)
- numero delle pagine che puntano ad essa (*inlinks*) e il loro PageRank.

Maggiore è il punteggio e più alta è la posizione del documento nella graduatoria prodotta.

In conclusione la rilevanza di una pagina è determinata esclusivamente sulla base dei links, non dipende dal contenuto testuale.

Calcolo di autovalori-autovettori di una matrice ed applicazioni nei processi di ranking

Si ha che la rilevanza di un sito è proporzionale alla somma dei valori delle rilevanze dei sito che puntano ad esso.

Più precisamente, dato un insieme di n pagine web $P_1, P_1, ...P_n$

indicate con $x_1, x_2, \ldots x_n$ le loro rilevanze,

e con A la matrice di adiacenza le cui entrate hanno i seguenti valori

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se la pagina } P_j \text{ punta alla pagina } P_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

detto k il fattore di proporzionalità si ha

$$x_i = k \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Calcolo di autovalori-autovettori di una matrice ed applicazioni nei processi di ranking

La determinazione di $x_1, \ldots, x_n$ è dunque ricondotto ad un problema di calcolo autovalore-autovettore

$$A\boldsymbol{x} = \frac{1}{k}\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T.$$

Si cerca un autovettore a componenti positive e a componente maggiore corrisponde rilevanza maggiore.

Dopo opportune manipolazioni ed ipotesi, si vede che l'autovettore associato all'autovalore di massimo modulo contiene l'elenco ordinato per rilevanza.

Tale procedura è stata applicata nella costruzione del motore di ricerca Google dagli ingegneri Page e Brin (da Page discende poi la denominazione PageRank).

Risoluzione numerica di equazioni non lineari

$$f(x) = 0, \qquad f \in C^0([a, b])$$

- Metodo di bisezione
- Metodi iterativi mediante rette
  - Metodo di Newton (o delle tangenti)
  - Metodo delle corde
  - Metodo delle secanti
  - Metodo Regula Falsi (o di falsa posizione)
- Metodo di punto fisso

Risoluzione numerica di sistemi di equazioni non lineari

Data $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, trovare $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0},$$

ovvero, con $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$, $f_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, risolvere il sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{cases} x_1^2 - \sin(x_2) - 25 = 0 \\ -\cos(x_1) + x_2 = 0 \end{cases} \right)$$

- Metodo di Newton e sue varianti
- Metodi di tipo secanti
- Metodi di punto fisso

Approssimazione di funzioni trigonometriche

Il problema è quello dell'approssimazione di funzioni continue periodiche di periodo 2π mediante polinomi trigonometrici anch'essi di periodo 2π.

Un polinomio trigonometrico di grado al più n è così definito

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}.$$

Se $|a_n| + |b_n| > 0$ il grado di $t_n(x)$ è esattamente n.

La successione di funzioni

$$\mathcal{T} = \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots\}$$

è linearmente indipendente e viene detta sistema trigonometrico.

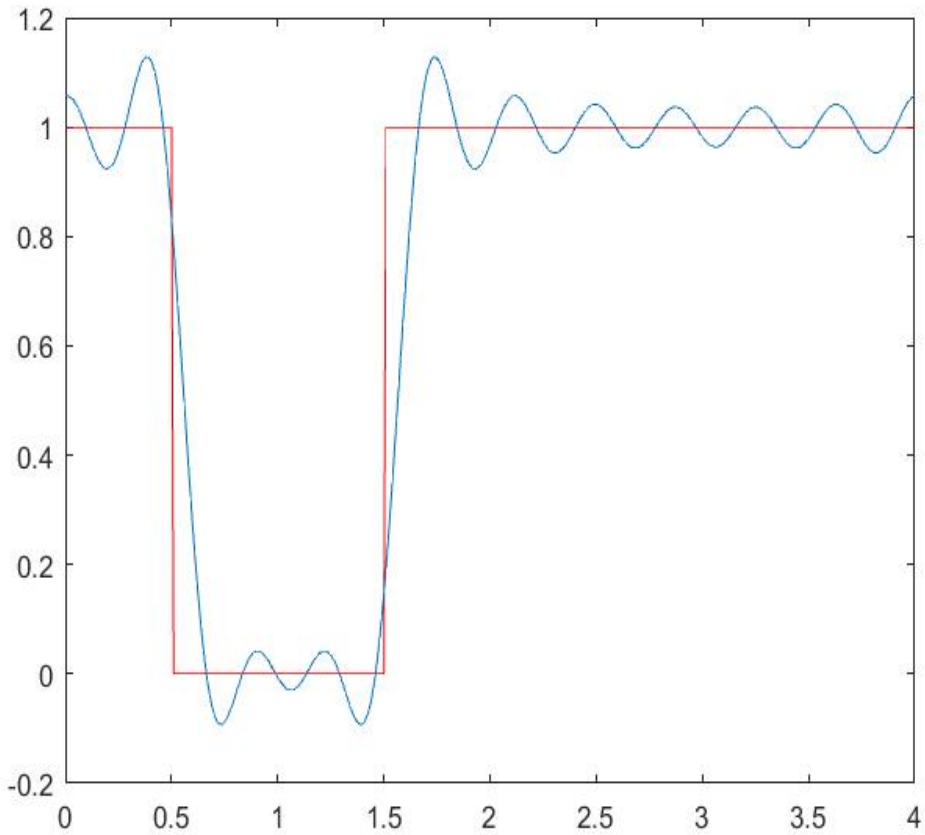
Approssimazione di funzioni trigonometriche

Denotato con $C_{2\pi}([0, 2\pi])$ l'insieme di tutte le funzioni continue in $[0, 2\pi]$ e periodiche di periodo 2π e data una funzione $f \in C_{2\pi}([0, 2\pi])$ si vuole costruire una successione di polinomi trigonometrici $\{t_n\}_n$ che converga uniformemente ad f ovvero tale che

$$\lim_n \|f - t_n\|_\infty = 0.$$

- Somma di Fourier trigonometrica
- Polinomio interpolante trigonometrico o Trasformata Discreta di Fourier (DFT)
  - Formula di quadratura trigonometrica
  - Algoritmo FFT (Fast Fourier Transform)

Approssimazione di funzioni trigonometriche



Approssimazione di dati nel senso dei minimi quadrati

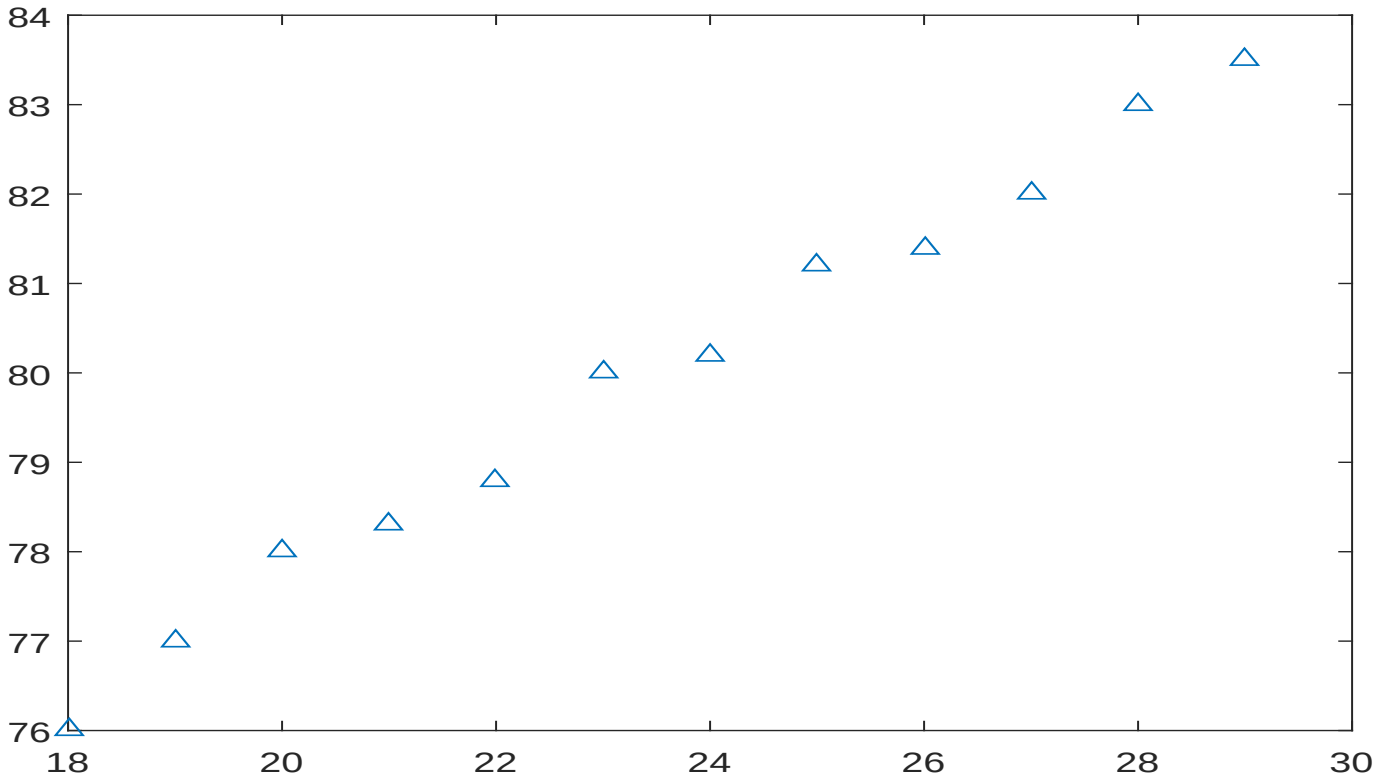
In molte applicazioni accade di avere una elevata quantità di dati e di voler descrivere mediante un opportuno modello l'andamento del fenomeno che ha generato tali dati.

Tale modello sarà poi utile per

- determinare valori non noti in corrispondenza di ascisse comprese tra i nodi;
- prevedere valori in corrispondenza di ascisse fuori range (non comprese tra i nodi iniziali);
- correggere gli stessi dati sperimentali che hanno originato il modello.

Esempio

Sono note le altezze di bimbi di età compresa tra i 18 e i 29 mesi.



Esempio

Si vuole determinare l'altezza presunta a 30 mesi.

30 è fuori range e quindi la spline lineare non può essere usata.

Per avere informazioni fuori range la funzione polinomio può essere usata.

Tuttavia, con un polinomio di grado n=numero dei nodi-1=11 cioè di grado "elevato", il valore atteso a 30 mesi è circa 757 cm $\sim$ 7.5 metri (?!)

Approssimazione di dati nel senso dei minimi quadrati

Siano (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, m coppie di dati rappresentanti un certo fenomeno sperimentale.

Scegliamo quindi delle funzioni base $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, con $n \ll m$ e supponiamo di approssimare il fenomeno che ha generato i dati (x_i, y_i), mediante una funzione del tipo

$$f_n(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x).$$

Nel nostro caso $f_n(x)$ sarà:

- un polinomio algebrico $\quad (\varphi_k(x) = x^{k-1})$
- un polinomio trigonometrico $\quad (\varphi_k(x) \in \mathcal{T})$.

Approssimazione di dati nel senso dei minimi quadrati

Un metodo efficace, molto usato nelle applicazioni, è quello di approssimare i dati nel senso dei minimi quadrati.

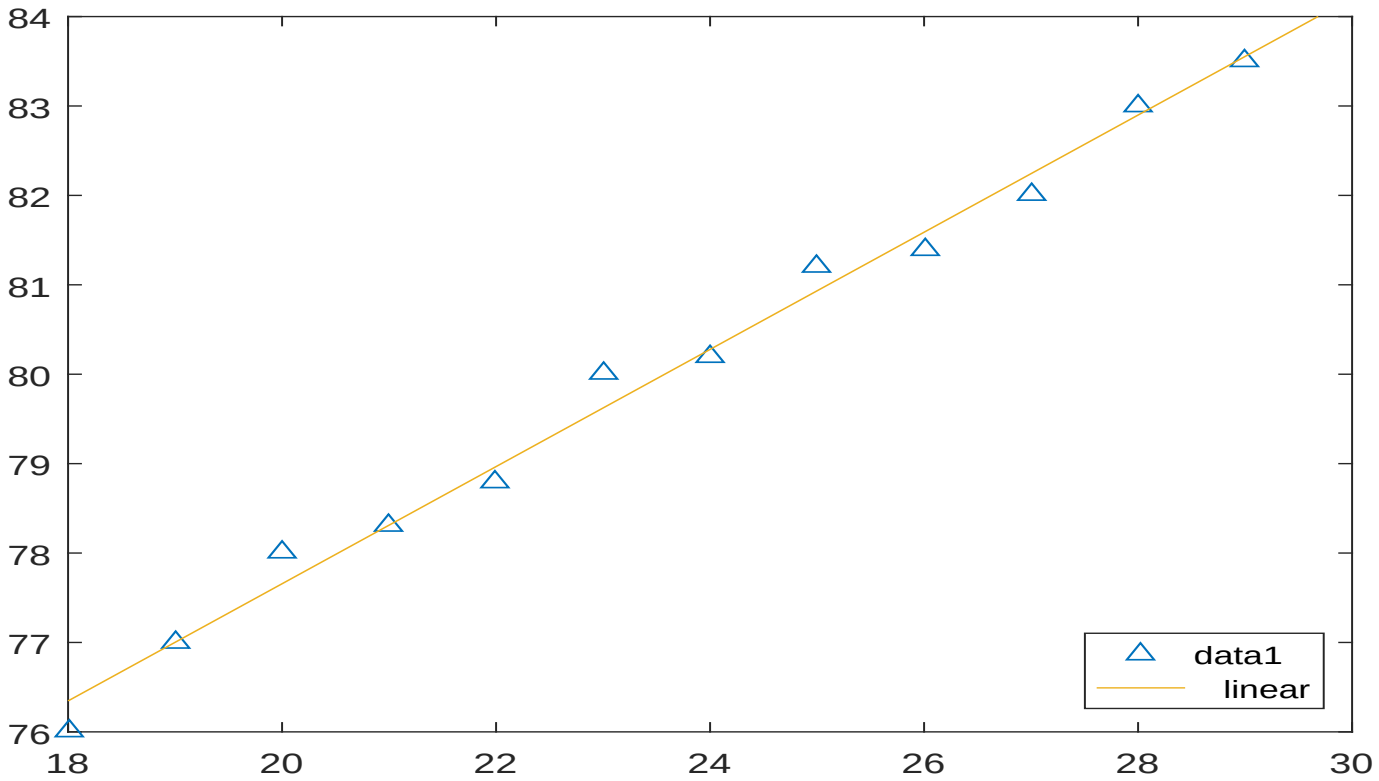
Esso consiste nel costruire un modello approssimante $f_n(x)$ che minimizzi la norma 2 del vettore dei residui ovvero calcolare i coefficienti $c_k, k = 1, \ldots, n$, in modo che $f_n(x)$ realizzi

$$\min_{f_n} \sum_{i=1}^{m} [y_i - f_n(x_i)]^2 = \min_{(c_1,\ldots,c_n)} \sum_{i=1}^{m} \left[y_i - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x_i) \right]^2 .$$

Il polinomio approssimante nel senso dei minimi quadrati è scelto di grado "basso".

Esempio

Approssimando i dati disponibili nel senso dei minimi quadrati con un polinomio di primo grado, il valore atteso a 30 mesi è circa 84.2 cm! :-)



Formule di cubatura

Per il calcolo numerico di integrali doppi del tipo

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy, \quad -\infty < a < b < +\infty, \ -\infty < c < d < +\infty$$

- Formule di cubatura di tipo Newton-Cotes
- Formule di cubatura di tipo Gauss

Riepilogo proposte di tesi

- Fattorizzazioni di matrici e loro applicazioni
- Metodi numerici per la risoluzione di sistemi lineari
- Calcolo degli autovalori di una matrice con applicazione ai motori di ricerca
- Risoluzione numerica di equazioni e sistemi di equazioni non lineari
- Approssimazione di funzioni trigonometriche
- Approssimazione di dati nel senso dei minimi quadrati
- Formule di cubatura per il calcolo numerico di integrali doppi