Quattro Proposte di Tesi Triennali

A. Cialdea *

1 La teoria dei limiti sugli insiemi quasi ordinati

Durante i corsi di Analisi Matematica si incontrano vari concetti di limiti, come il limite di una successione

$$\lim_{n\to\infty} a_n \,,$$

vari tipi di limiti per le funzioni reali di una variabile reale

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \qquad \lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x), \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x).$$

o di più variabili reali

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y), \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)\,.$$

Anche l'integrale di Riemann può essere visto come limite di somme integrali

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)\,.$$

Questo ultimo esempio, in particolare, è un po' delicato, in quanto le somme integrali dipendono non solo dalla decomposizione dell'intervallo $[a,b]$, ossia dei punti $\{x_1,\ldots,x_{n+1}\}$, ma anche dalla scelta dei punti ξ_k.

Tutti questi concetti sono stati introdotti volta per volta, costringendo - tra l'altro - a ridimostrare teoremi simili, quali, per esempio, l'unicità del limite o il teorema di regolarità per funzioni monotone.

Anni fa Picone e Moore - indipendentemente l'uno dall'altro - trovarono il modo di unificare tutte queste definizioni in un unico concetto, che è quello di limite di una funzione definita su un insieme quasi ordinato.

Da una parte questo permette di dimostrare una sola volta i vari teoremi fondamentali e non ridimostrarli per ogni concetto introdotto.

Dall'altra parte fornisce uno strumento snello ed elegante per introdurre ulteriori concetti più raffinati, che sarebbero difficili da dare in altro modo.

Un esempio notevole è il concetto di integrale di Henstock-Kurzweil (detto anche integrale di gauge).

Nella tesi vegono esposti i fondamenti di questa teoria generale dei limiti.

* *email:* alberto.cialdea@unibas.it

2 Serie multiple

La somma di una serie numerica viene definita come il limite della successione delle somme parziali, ossia

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \, .$$

Sebbene esistano altri metodi di sommazione per le serie numeriche (come quello di Cesaro), questo che abbiamo ricordato è l'unico modo naturale per sommare una serie numerica.

Consideriamo ora una serie doppia

$$\sum_{h,k}^{1,\infty} a_{hk} \ , \tag{1}$$

ossia una serie in cui il termine generico non dipende solo da un indice k, ma da una coppia di indici h, k; cosa significa sommare questa serie ?

Quello che si vede è che esistono diversi metodi "naturali" di sommazione. Potremmo considerare, ad esempio, la sommazione per quadrati

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{hk}$$

oppure la sommazione per diagonali

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \sum_{h+k=1}^{j} a_{hk} \, .$$

Questi sono solo esempi dei tanti metodi di sommazione che possiamo introdurre per una serie doppia. Sono tutti parimenti naturali e - in generale - non sono equivalenti, a meno che la serie (1) non abbia i termini non negativi, nel qual caso tutti i metodi di sommazione sono equivalenti.

Nella tesi si espone la teoria delle serie doppie, o più in generale delle serie multiple

$$\sum_{h_1,\ldots,h_n}^{1,\infty} a_{h_1\ldots h_n} \, .$$

3 Serie divergenti

Secoli fa EULERO osservava la relazione - da lui definita paradossale -

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \frac{1}{4}\,. \tag{2}$$

Questa relazione non può essere dimostrata con l'usuale concetto di somma di una serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k\,, \tag{3}$$

dato che la relativa successione delle somme parziali, essendo

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\,,$$

non ammette limite.

In altri termini la serie a primo membro della (2) è una serie non convergente.

La domanda che si pone è quindi: come giustificare in modo rigoroso l'intuizione di EULERO ?

La risposta è che è possibile definire dei metodi di sommazione più raffinati di quello naturale dato dalla (3), che permettono di dare senso alla somma di una serie che non sia convergente nel senso usuale. Un esempio è dato dal metodo di sommazione di Cesaro $(C, 1)$, che consiste nel prendere come somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ il limite delle medie aritmetiche delle somme parziali, ossia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n}$$

essendo

$$S_h = \sum_{k=1}^{h} a_k\,.$$

Neanche utilizzando questo metodo, però, si riesce a giustificare la (2). Per darle un significato preciso occorre quindi considerare altri metodi di sommazione.

Nella tesi vengono illustrati i metodi di sommazione più importanti (la sommazione di Cesaro (C, k), Hölder, Abel) e si indagano le relazioni che sussistono tra di loro.

4 L'integrale di Riemann-Stieltjes

Come noto, l'integrale di Riemann di una funzione limitata definita in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ viene definito come limite (in un senso appropriato)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)\,, \tag{4}$$

dove $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} = b$ e ξ_k è un punto preso nell'intervallo $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Sia ora g una funzione monotona non decrescente definita in $[a, b]$ (non necessariamente continua). Si definisce integrale di Riemann-Stieltjes di f rispetto a g il limite (se esiste !)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]\,, \tag{5}$$

dove i punti x_k e ξ_k hanno lo stesso significato di prima.

E' evidente che il classico integrale di Riemann (4) corrisponde a prendere $g(x) = x$ nella (5). L'integrale di Riemann-Stieltjes costituisce quindi un'estensione del concetto di integrale di Riemann.

Nela tesi vengono esposti i fondamenti della teoria di questo integrale che trova applicazioni in diversi campi della Matematica.