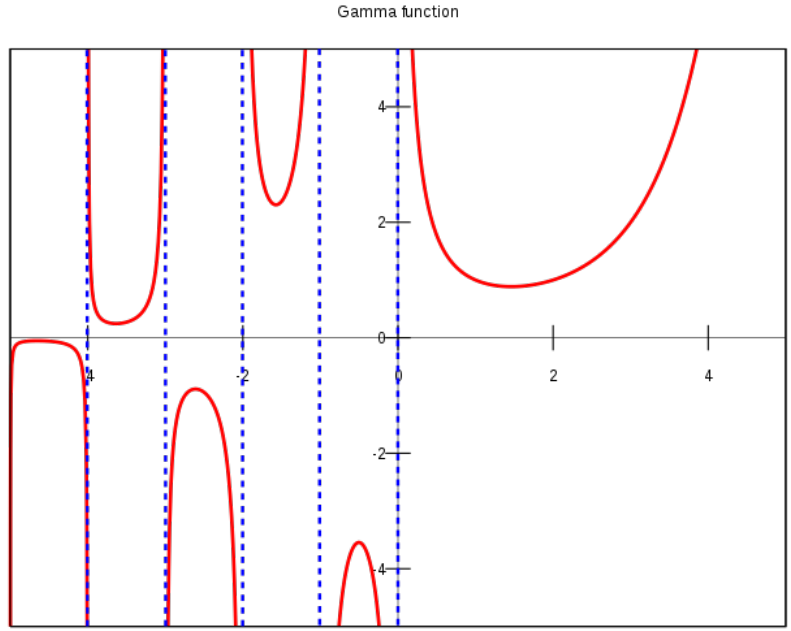
La funzione Gamma di Eulero

Per ogni $z \notin \{0, -1, -2, \ldots\}$, è

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Per ogni x reale positivo è anche

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$



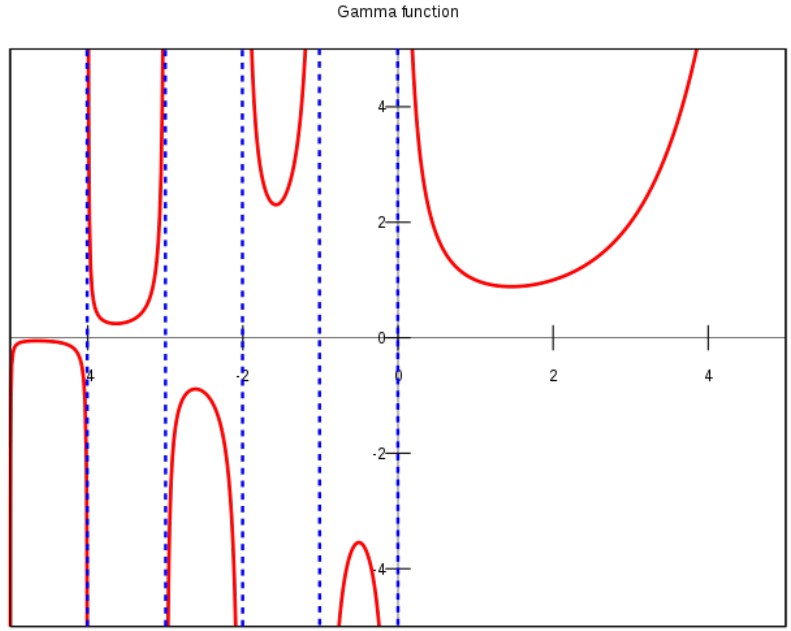
La funzione Gamma di Eulero

Per ogni $z \notin \{0, -1, -2, \ldots\}$, è

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Per ogni x reale positivo è anche

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$



Si ha sempre $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, da cui $\Gamma(k+1) = k!$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

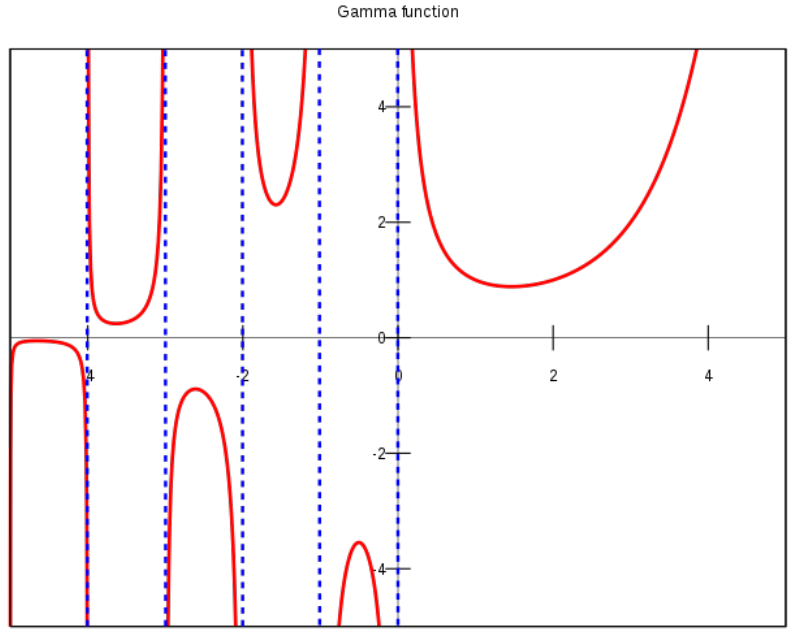
La funzione Gamma di Eulero

Per ogni $z \notin \{0, -1, -2, \ldots\}$, è

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Per ogni x reale positivo è anche

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$



Si ha sempre $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, da cui $\Gamma(k+1) = k!$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

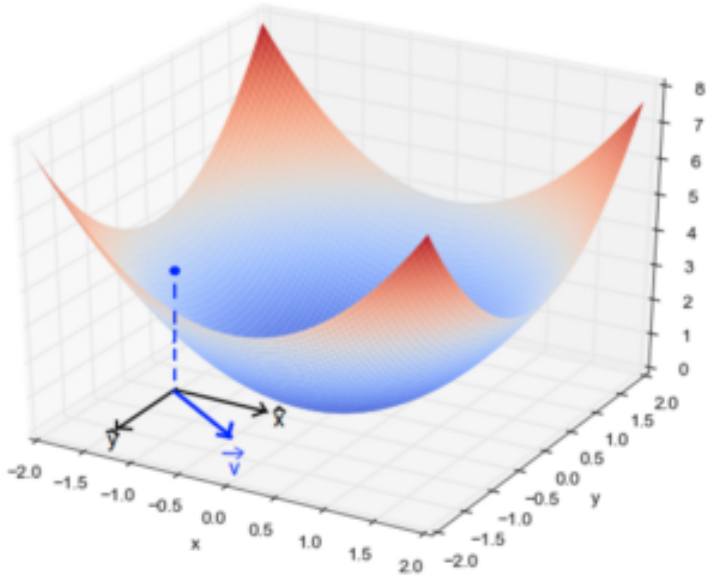
La funzione Γ si incontra in molti ambiti della matematica, della fisica e del calcolo delle probabilità.

Ad esempio, il volume della sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$ è $V_n = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$.

Funzioni convesse

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso.
Si dice che $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è convessa se
per ogni $a, b \in \Omega$
e ogni $\lambda \in [0,1]$ si ha

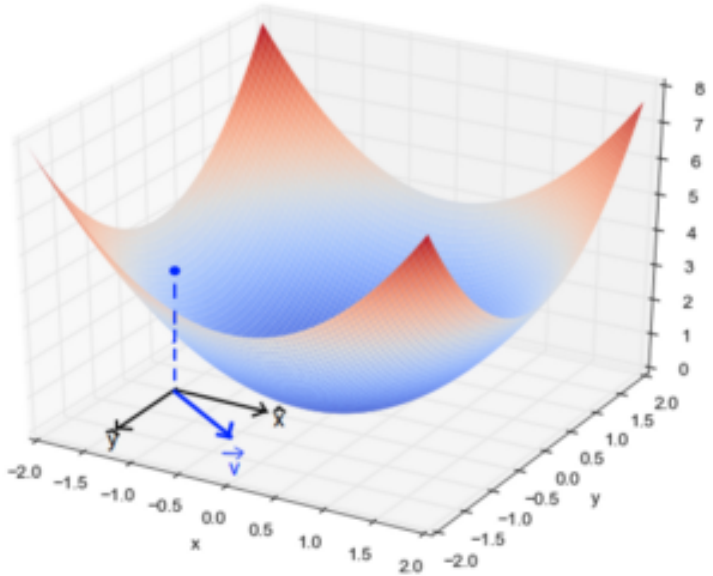
$$f\big((1-\lambda)a+\lambda b\big) \leq (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b).$$



Funzioni convesse

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso.
Si dice che $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è convessa se
per ogni $a, b \in \Omega$
e ogni $\lambda \in [0,1]$ si ha

$$f\big((1-\lambda)a+\lambda b\big) \leq (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b).$$



Queste funzioni sono importanti per diverse questioni, in particolare legate ai problemi di ottimizzazione.

Irrazionalità di π

- È vero che π è irrazionale?
  Cioè: è vero che non esistono p, q interi tali che $\pi = \frac{p}{q}$?

Irrazionalità di π

- È vero che π è irrazionale?
  Cioè: è vero che non esistono p, q interi tali che $\pi = \frac{p}{q}$?

  Risposta: Sì. [Lambert (1761), Hermite, Cartwright, Niven, Bourbaki, Laczkovich.]

Irrazionalità di π

- È vero che π è irrazionale?
  Cioè: è vero che non esistono p, q interi tali che $\pi = \frac{p}{q}$?

  Risposta: Sì. [Lambert (1761), Hermite, Cartwright, Niven, Bourbaki, Laczkovich.]

- È vero che π è trascendente?
  Cioè: è vero che non esiste nessun polinomio P a coefficienti interi tale che $P(\pi) = 0$?

Irrazionalità di π

- È vero che π è irrazionale?
  Cioè: è vero che non esistono p, q interi tali che $\pi = \frac{p}{q}$?

  Risposta: Sì. [Lambert (1761), Hermite, Cartwright, Niven, Bourbaki, Laczkovich.]

- È vero che π è trascendente?
  Cioè: è vero che non esiste nessun polinomio P a coefficienti interi tale che $P(\pi) = 0$?

  Risposta: Sì. [Lindemann (1882).]

Irrazionalità di π

- È vero che π è irrazionale?
  Cioè: è vero che non esistono p, q interi tali che $\pi = \frac{p}{q}$?

  Risposta: Sì. [Lambert (1761), Hermite, Cartwright, Niven, Bourbaki, Laczkovich.]

- È vero che π è trascendente?
  Cioè: è vero che non esiste nessun polinomio P a coefficienti interi tale che $P(\pi) = 0$?

  Risposta: Sì. [Lindemann (1882).]

- È vero che π è ricco (in base 10)?
  Cioè: è vero che la rappresentazione decimale di π contiene qualunque sequenza finita di cifre?

Irrazionalità di π

- È vero che π è irrazionale?
  Cioè: è vero che non esistono p, q interi tali che $\pi = \frac{p}{q}$?

  Risposta: Sì. [Lambert (1761), Hermite, Cartwright, Niven, Bourbaki, Laczkovich.]

- È vero che π è trascendente?
  Cioè: è vero che non esiste nessun polinomio P a coefficienti interi tale che $P(\pi) = 0$?

  Risposta: Sì. [Lindemann (1882).]

- È vero che π è ricco (in base 10)?
  Cioè: è vero che la rappresentazione decimale di π contiene qualunque sequenza finita di cifre?

  Risposta: Non si sa (ancora).