# Giornata di Orientamento Tesi

23/04/2021

Laurea in Matematica

Antonio Azzollini

# Equazioni differenziali ordinarie: cosa sono?

Partiamo con un esempio: cerchiamo le soluzioni di $(y')^2 - y^2 = -\cos 2x$,

ossia funzioni $y : I \to \mathbb{R}$ derivabili e tali che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$(y'(x))^2 - (y(x))^2 = -\cos 2x. \tag{1}$$

Ad esempio, la funzione $y = \cos(x)$ definita su tutto $\mathbb{R}$ è una soluzione (non l'unica) dell'equazione (prova a verificarlo!)

# Equazioni differenziali ordinarie: cosa sono?

Una equazione differenziale che si presenta nella forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{n-1}), \tag{2}$$

con $f : I \times A \to \mathbb{R}$, $I$ intervallo e $A \subset \mathbb{R}^n$, si dice equazione differenziale di ordine $n$ in forma normale.

Ad esempio, una equazione differenziale del primo ordine in forma normale si presenta come segue

$$y' = f(x, y).$$

## Ed i sistemi di equazioni differenziali?

Un sistema di $n$ equazioni differenziali del primo ordine in forma normale, per esempio, si presenta in questo modo

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \cdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

ed una soluzione è una funzione vettoriale $y = (y_1, \ldots, y_n) : I \to \mathbb{R}^n$ derivabile tale che, detta $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, risulta verificata l'equazione differenziale vettoriale $y' = F(x, y)$.

## Ed i sistemi di equazioni differenziali?

Ad esempio, la funzione vettoriale definita in $]0, +\infty[$ da

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \log t \end{cases}$$

è una soluzione (non l'unica) del sistema (il puntino rappresenta la derivata rispetto a t)

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{t} + \dfrac{y}{\log t} \\ \dot{y} = 1 + \dfrac{ty}{x} \end{cases}.$$

# La teoria

- Come si risolve un sistema di EDO?
- Se non riesco a risolverlo, posso almeno stabilire se ammette soluzioni?
- Se ammette soluzioni, quante sono? Che proprietà hanno?

La teoria cerca di rispondere a queste domande studiando le proprietà possedute da classi di sistemi di EDO, spesso accompagnate da vincoli a-priori sulle soluzioni (dati iniziali, dati al bordo...).

# Una teoria in continuo sviluppo

I sistemi di EDO sono spesso caratterizzati da una loro specificità, tale da rendere spesso complicata, qualche volta impossibile, una trattazione universale e del tutto esaustiva (anche sui sistemi del primo ordine!)

Eppure...

# Una teoria in continuo sviluppo

Essi intervengono nella descrizione dei fenomeni della fisica

Equazione del pendolo:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$



# Una teoria in continuo sviluppo

E di quelli studiati in biologia

Modello di dinamica delle popolazioni di Malthus:

$$\dot{x} = rx$$




http://malthusday.blogspot.it/2010/10/

# Una teoria in continuo sviluppo

In situazioni…sentimentali

Equazioni differenziali di Romeo e Giulietta

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -aj \\ \dfrac{dj}{dt} = br \end{cases}$$



# Una teoria in continuo sviluppo

...ed in quelle di conflitto.

Legge del quadrato di Lanchester

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\beta B \\ \frac{dB}{dt} = -\alpha A \end{cases}$$



# Una teoria in continuo sviluppo

Per descrivere la diffusione di una epidemia reale...

Modello SIR

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta \dfrac{S}{N} I \\ \dfrac{dI}{dt} = -\beta \dfrac{S}{N} I - \gamma I \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$



# Una teoria in continuo sviluppo

...o di una ipotetica...

Zombies attack equations

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \Pi - \beta SZ - \delta S \\ \dfrac{dZ}{dt} = \beta SZ + \zeta R - \alpha SZ \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma S + \alpha SZ - \zeta R \end{cases}$$

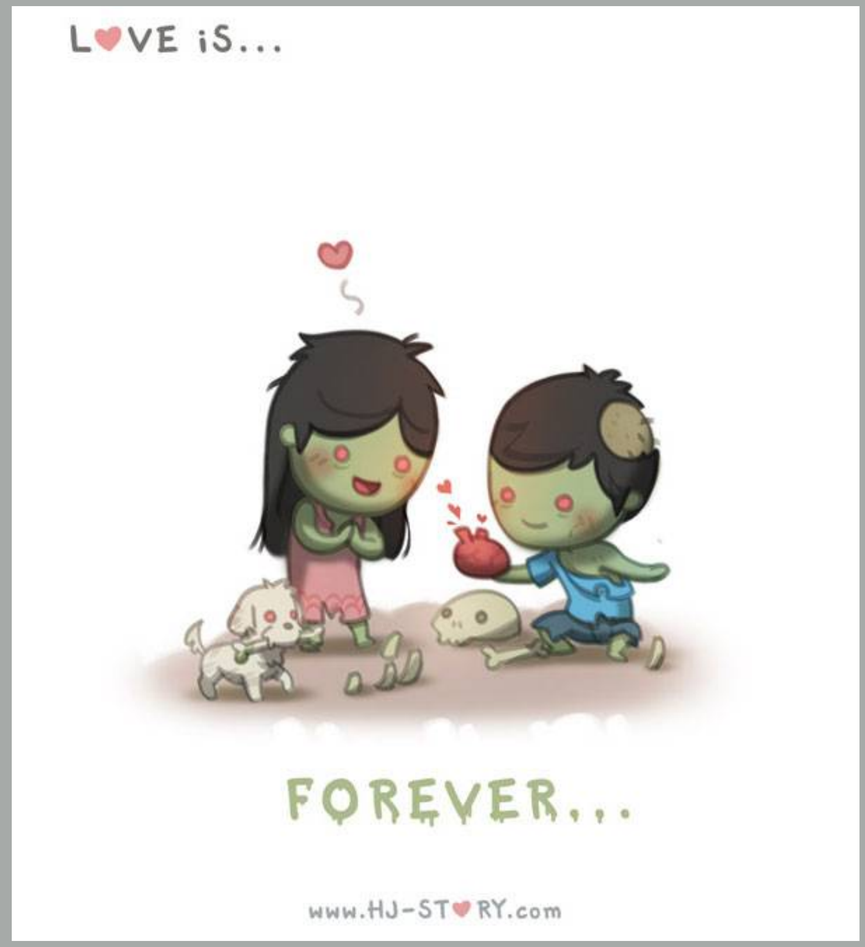


# Una teoria in continuo sviluppo

Una teoria, quella delle EDO, pronta a fornire modelli sempre nuovi, capaci di descrivere la realtà nel suo divenire.

Romeo and Juliet zombies equations

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \\ \frac{dZ}{dt} = \\ \frac{dR}{dt} = \\ \frac{dr}{dt} = \\ \frac{dj}{dt} = \end{cases} \quad ?$$



# Referenze


1. Ghimenti, M.,.Da Thanos agli zombies: derivate e dinamiche di popolazione https://pagine.dm.unipi.it/ghimenti/documenti/settmat20.pdf
2. Granieri, L., Le equazioni di Romeo e Giulietta, Alice e Bob, N. 40 (2014).
3. Kermack, W. O.; McKendrick, A. G. (1927). "A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics". Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 115 (772): 700–721.
4. Lanchester, F.W., Mathematics in Warfare in The World of Mathematics, Vol. 4 (1956) Ed. Newman, J.R., Simon and Schuster, 2138–2157; anthologised from Aircraft in Warfare (1916)

# Referenze


5. Munz, P., Hudea, I., Imad, J. and Smith?, R.J. When zombies attack!: Mathematical modelling of an outbreak of zombie infection (Infectious Disease Modelling Research Progress 2009, in: J.M. Tchuenche and C. Chiyaka, eds, pp133-150).
6. Strogatz, S., "Love Affairs and Differential Equations", Mathematics Magazine, Volume 61 Number 1 (February 1988), page 35
7. Wilson, M. L., Britton, N. F., Franks, N. R. (2002). Chimpanzees and the mathematics of battle. Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences, 269, 1107-1112. doi:10.1098/rspb.2001.1926