Giornata di Orientamento Tesi 2022

Antonio Azzollini

Temi generali

Temi generali

- Curve e superfici

Temi generali

- Curve e superfici
- Equazioni differenziali

Temi generali

- Curve e superfici
- Equazioni differenziali
- Teoria delle serie di Fourier

Curve e superfici

Curve e superfici

Definizione

Una curva (γ, C) nel piano (nello spazio) è una coppia in cui, detto I un intervallo,

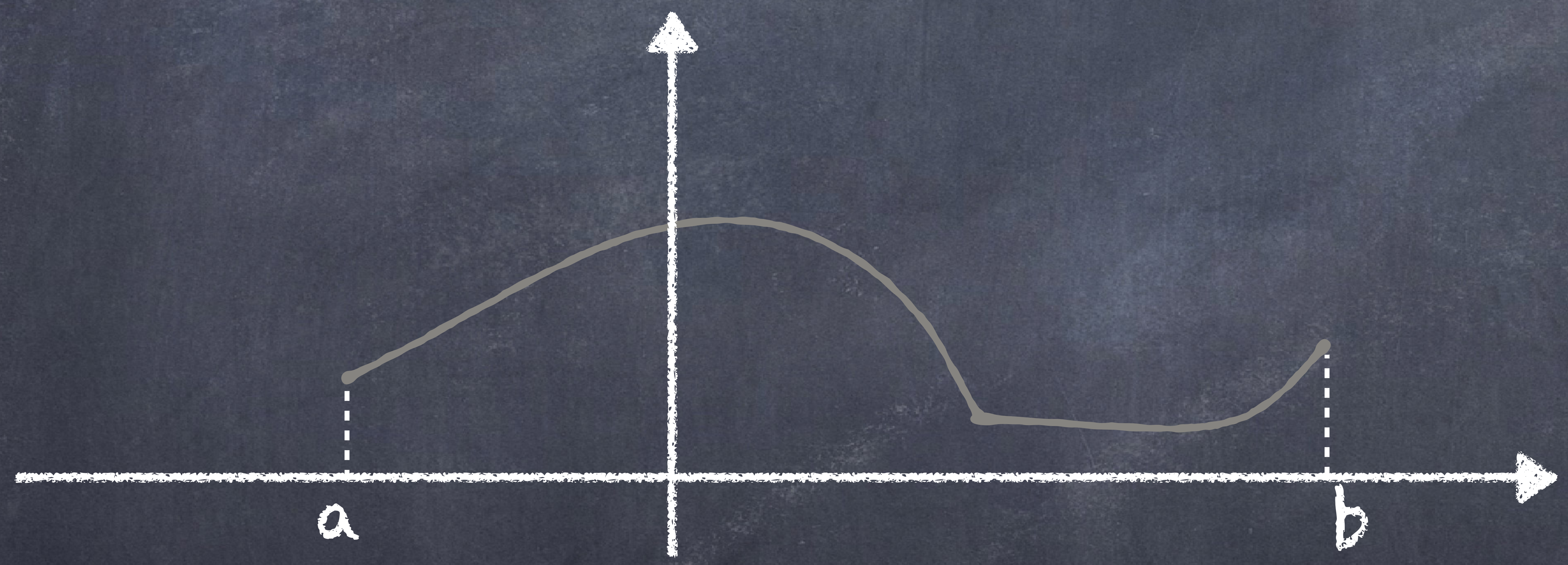
- $\gamma : I \to \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$ continua
- $C = \gamma(I)$

Curve e superfici

Il primo pensiero va…

Curve e superfici

Il primo pensiero va...

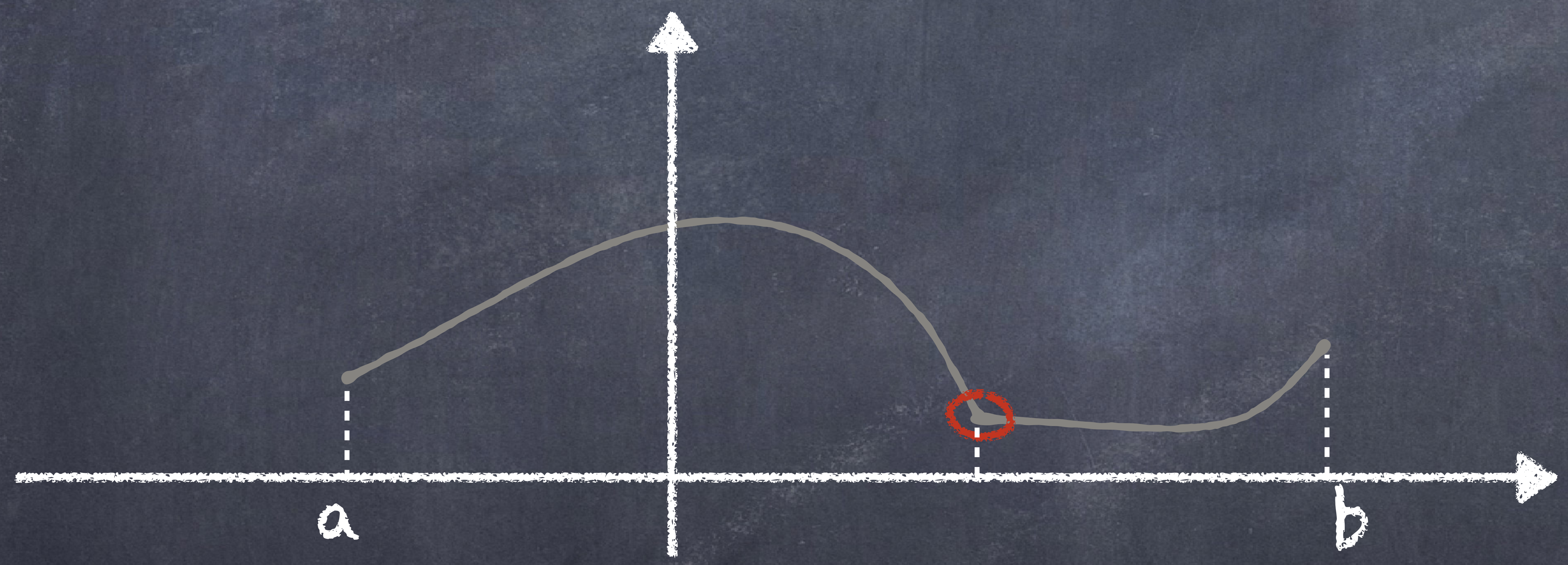


$f : [a, b] \to \mathbb{R}$
continua

...ai grafici di funzioni continue

Curve e superfici

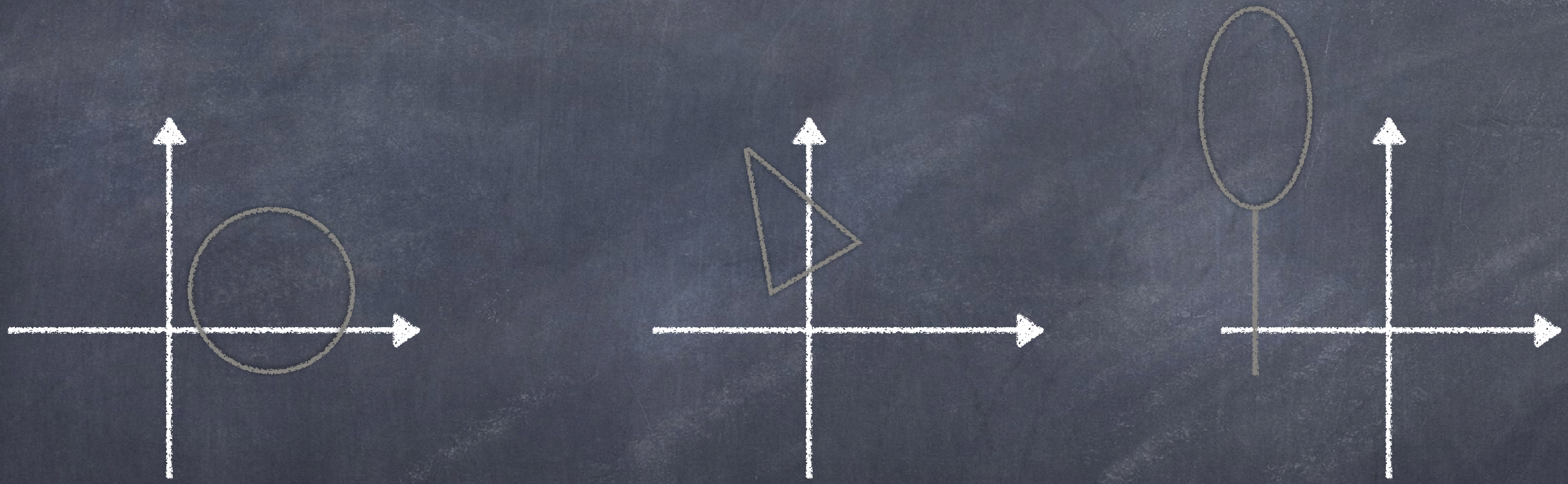
Il primo pensiero va...



$f : [a, b] \to \mathbb{R}$
continua

...ai grafici di funzioni continue (anche non derivabili).

Curve e superfici

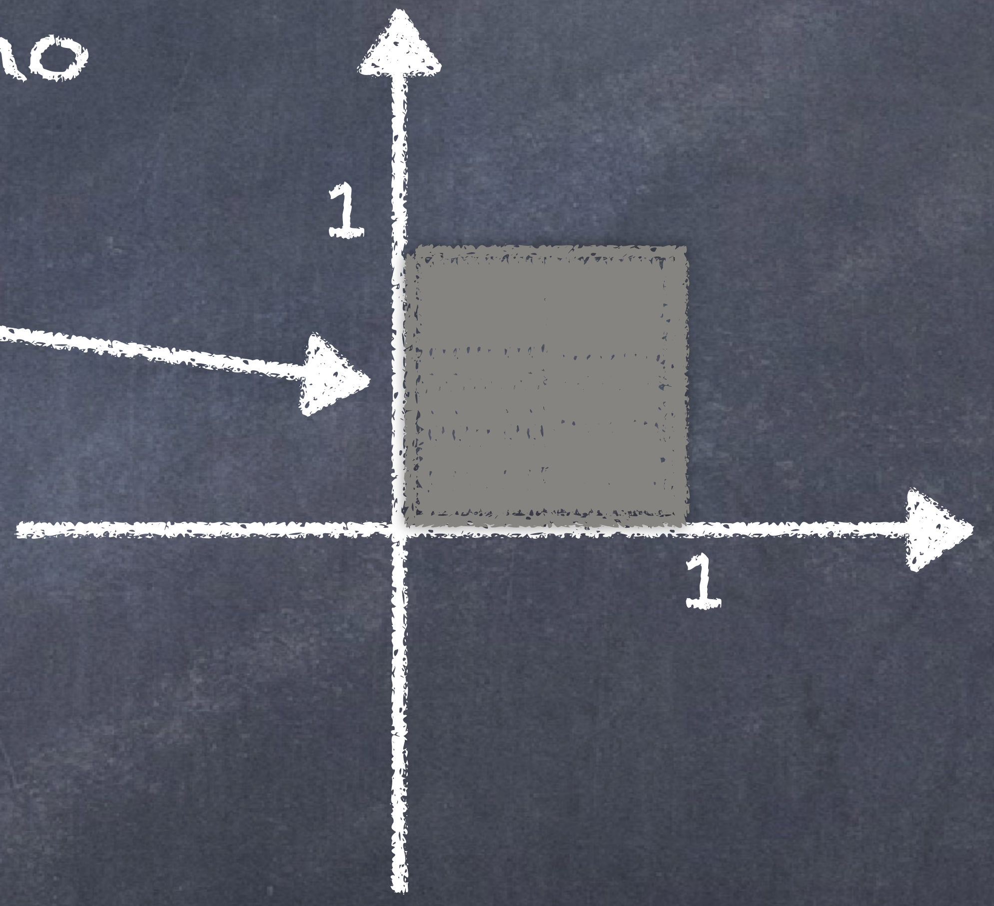


...o a quelle curve che disegniamo da bambini.

Curve e superfici

Ma cosa pensereste se vi fosse detto che...

...questo è il sostegno di una curva?

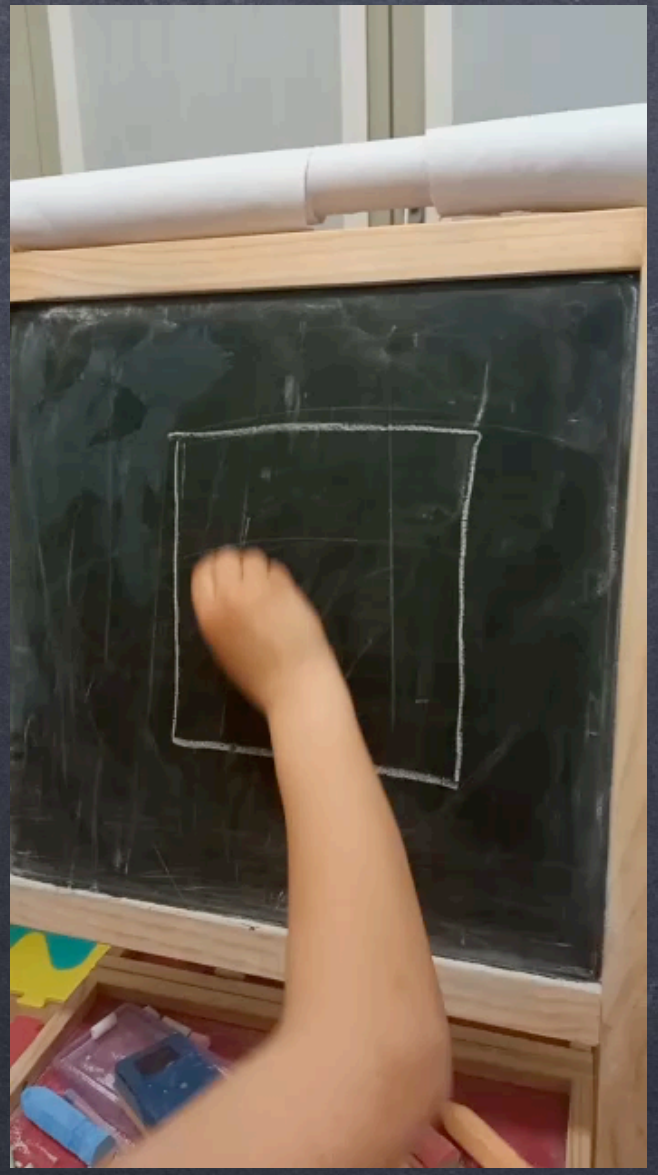


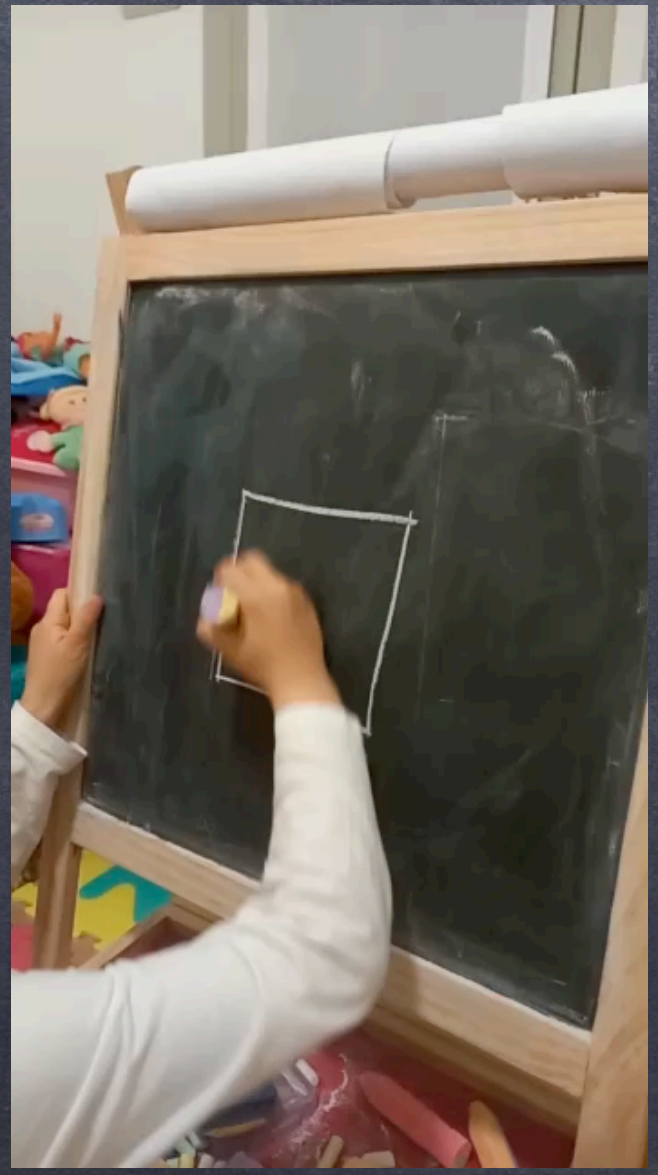
La curva di Peano ha come sostegno il quadrato $[0,1]\times[0,1]$.

Curve e superfici

- Tema di tesi: curve che riempiono lo spazio.

Studio di curve (γ, C) per le quali C è la chiusura di un dominio di $\mathbb{R}^2$.





Curve e superfici

Definizione

Una superficie regolare semplice (r, Σ) nello spazio è una coppia in cui, detto T un aperto connesso di $\mathbb{R}^2$,

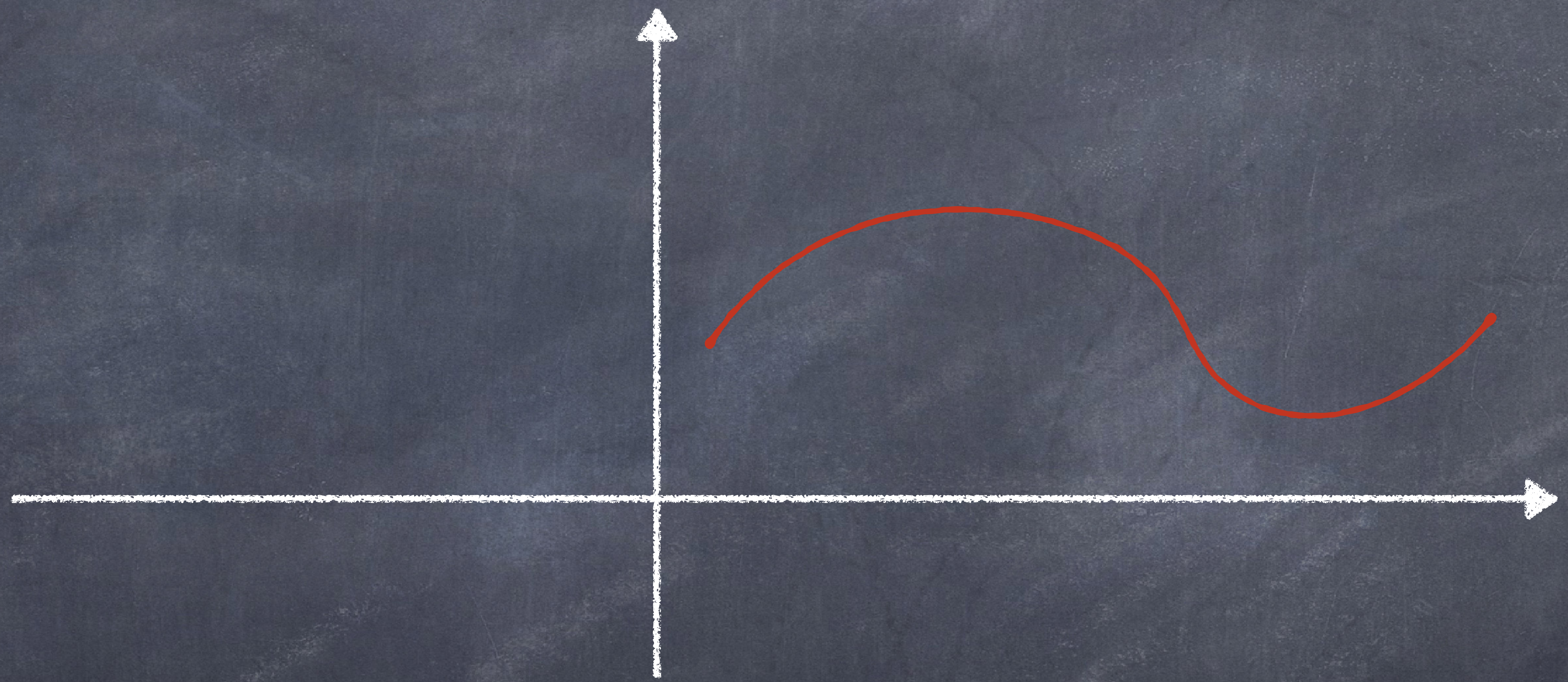
- $r : T \to \mathbb{R}^3$ è iniettiva e di classe C^1
- lo jacobiano di r ha rango 2
- $\Sigma = r(T)$

Curve e superfici

Il matematico curioso si chiede:

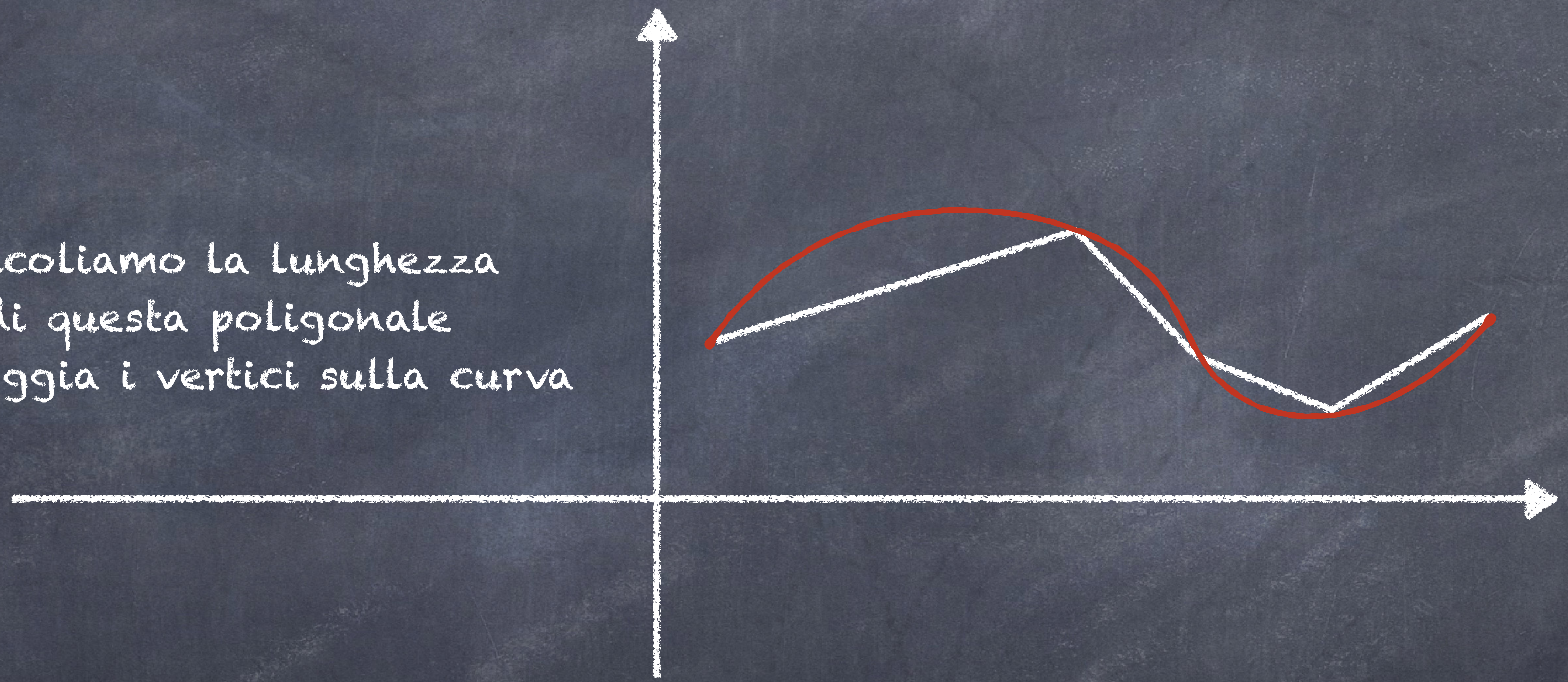
- come possiamo calcolare la lunghezza di una curva?
- ...e l'area di una superficie?

Curve e superfici



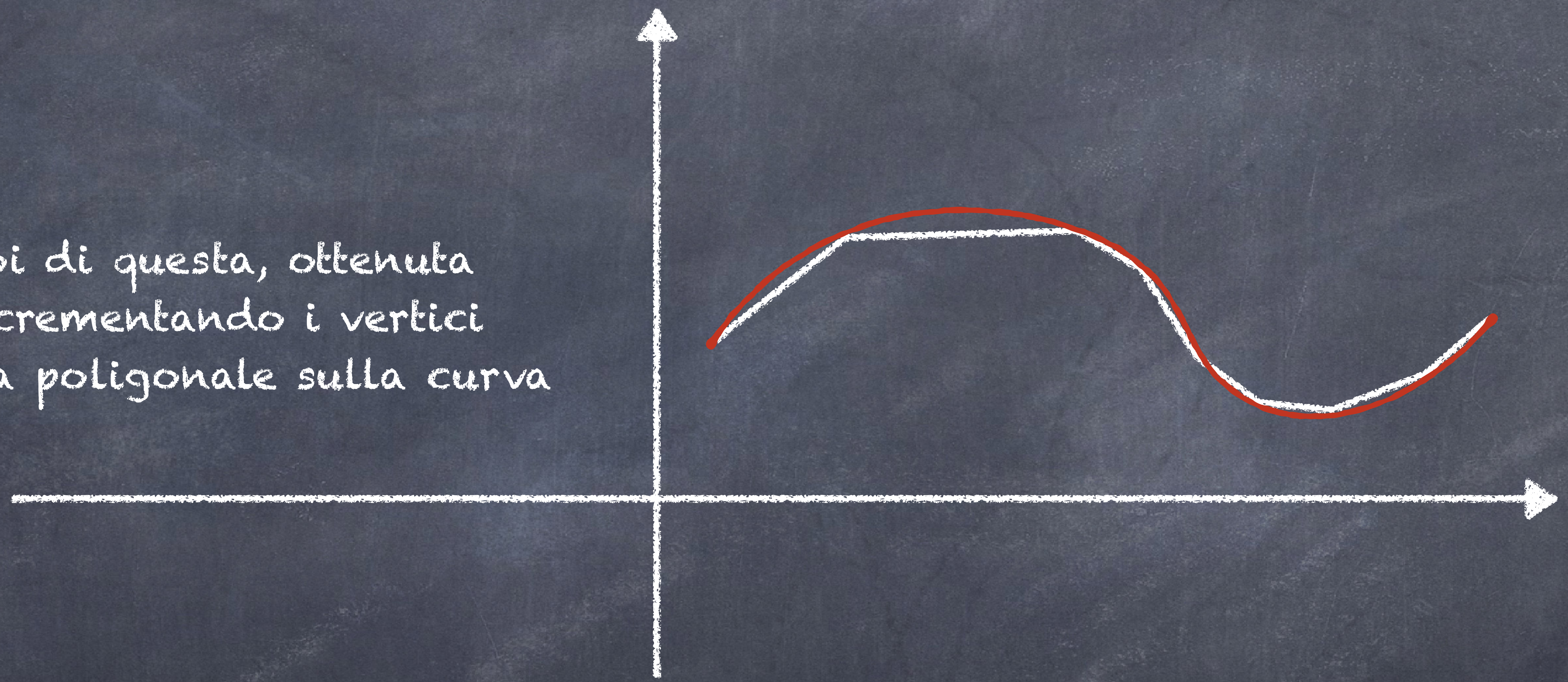
Curve e superfici

Calcoliamo la lunghezza
di questa poligonale
che poggia i vertici sulla curva



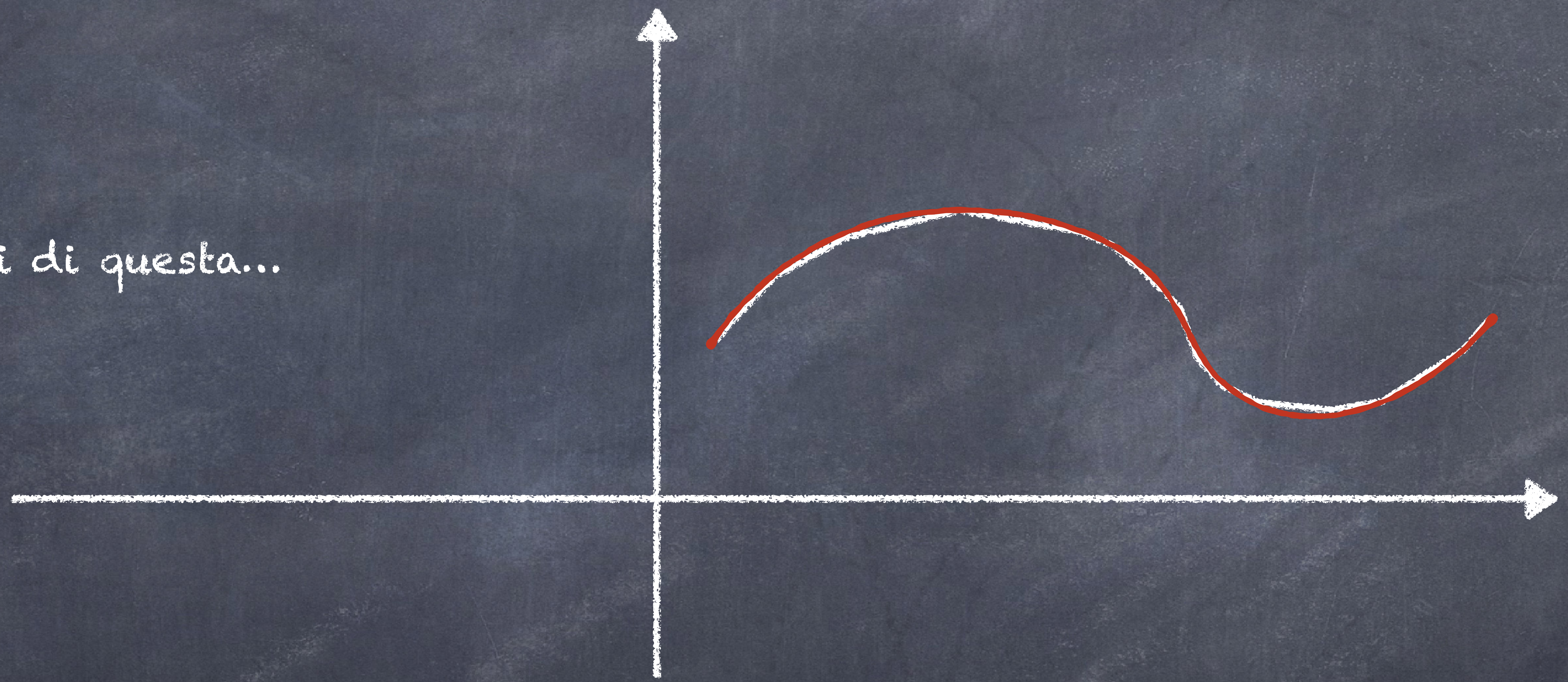
Curve e superfici

Poi di questa, ottenuta
incrementando i vertici
della poligonale sulla curva



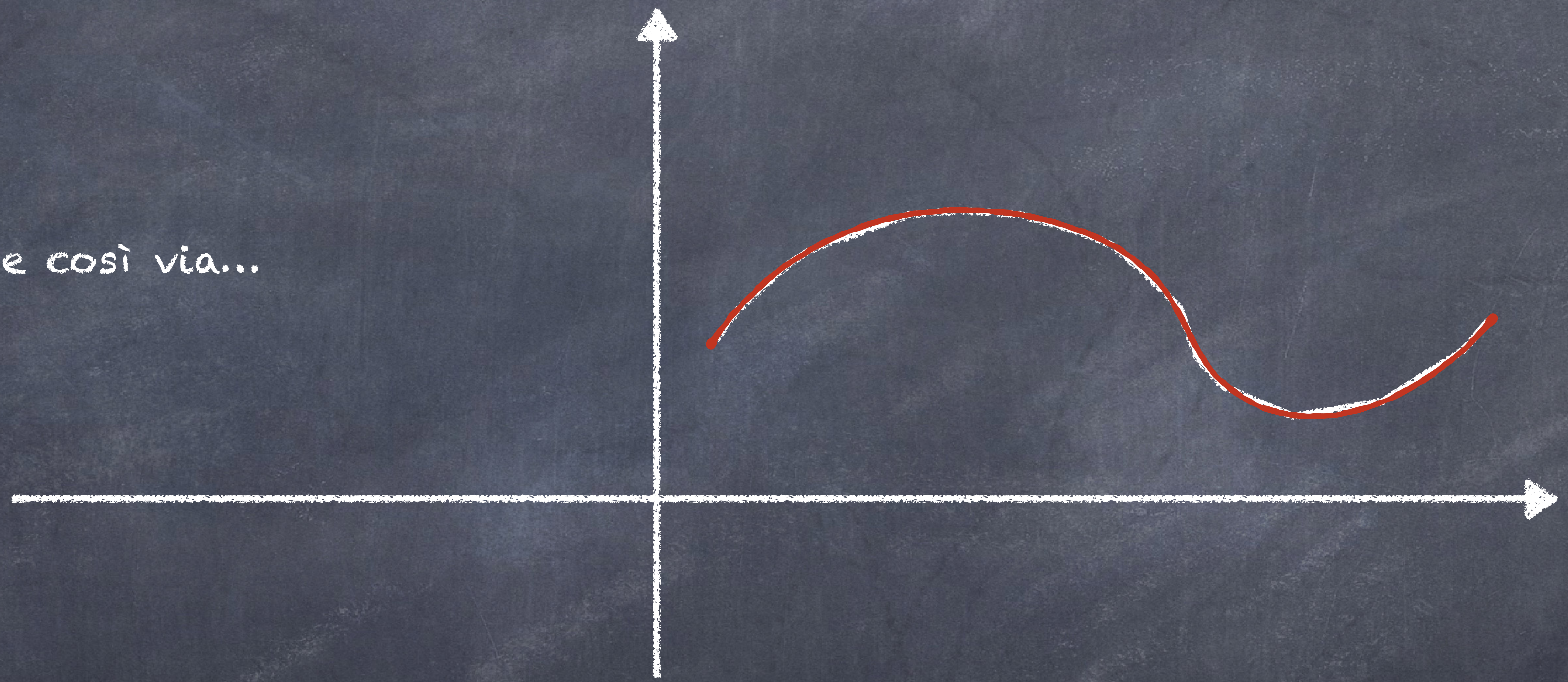
Curve e superfici

Poi di questa...



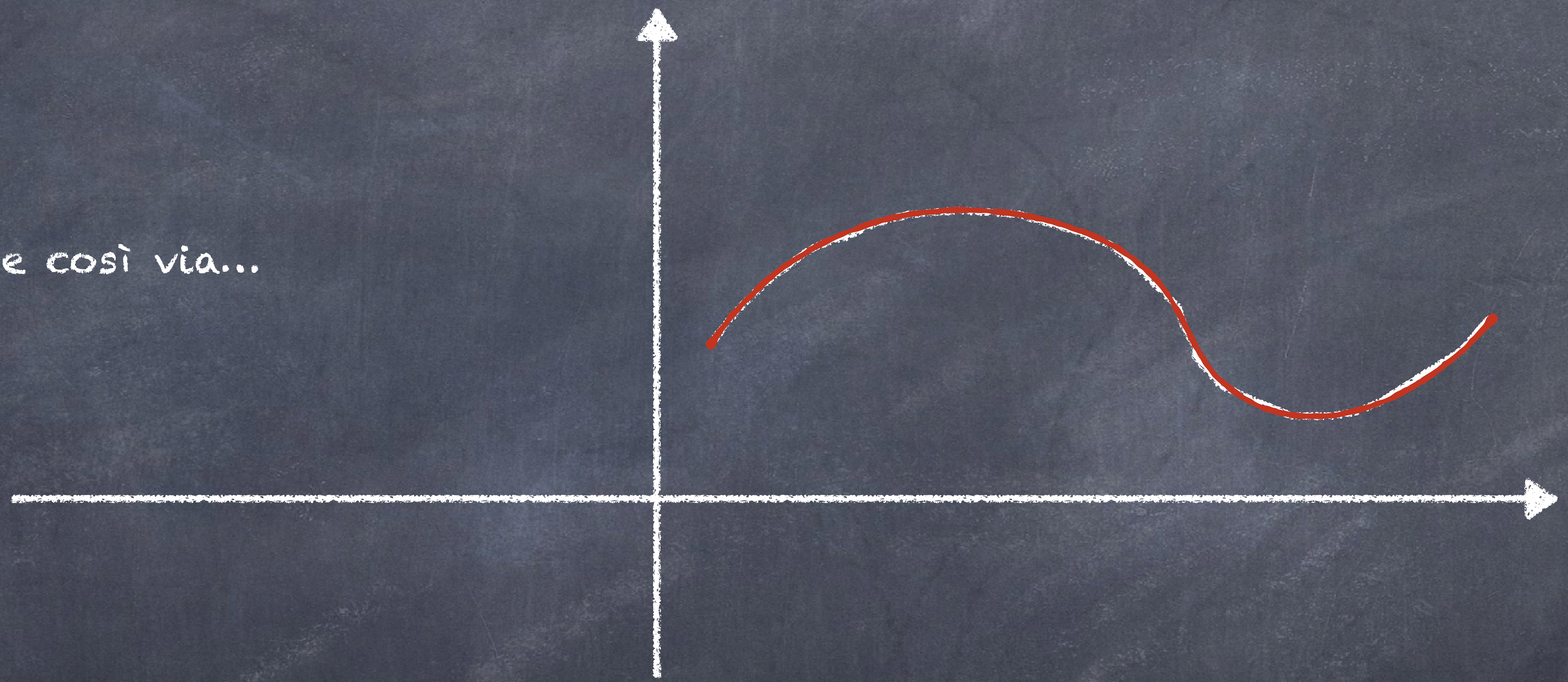
Curve e superfici

...e così via...



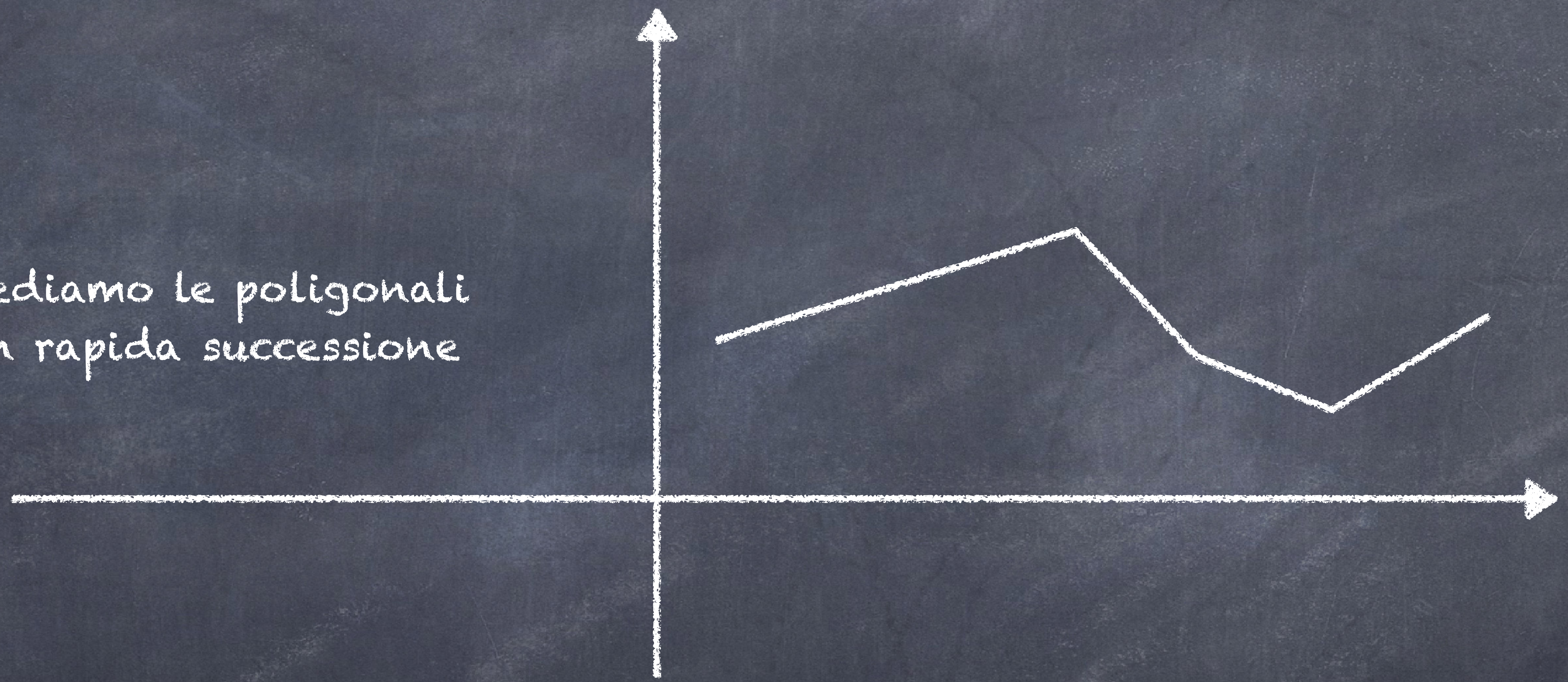
Curve e superfici

...e così via...



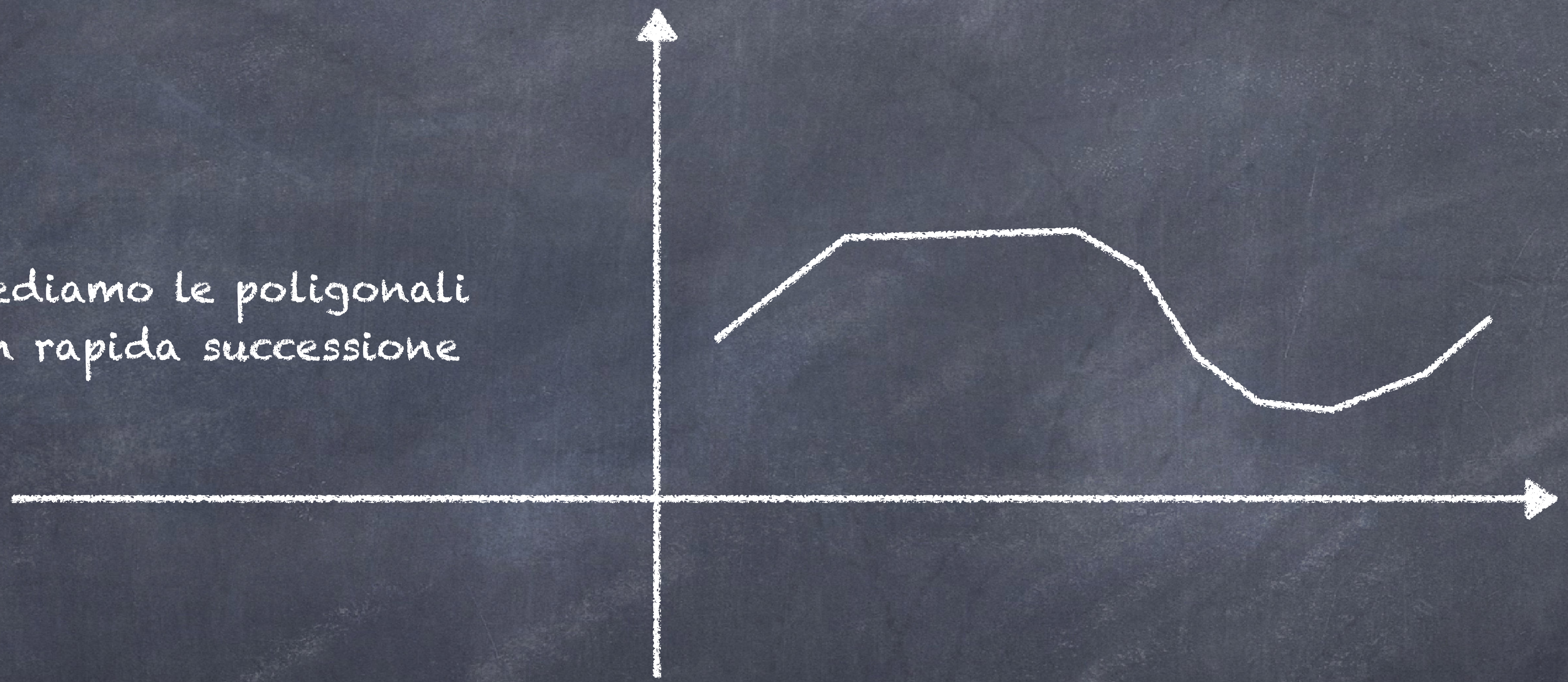
Curve e superfici

Vediamo le poligonali
in rapida successione



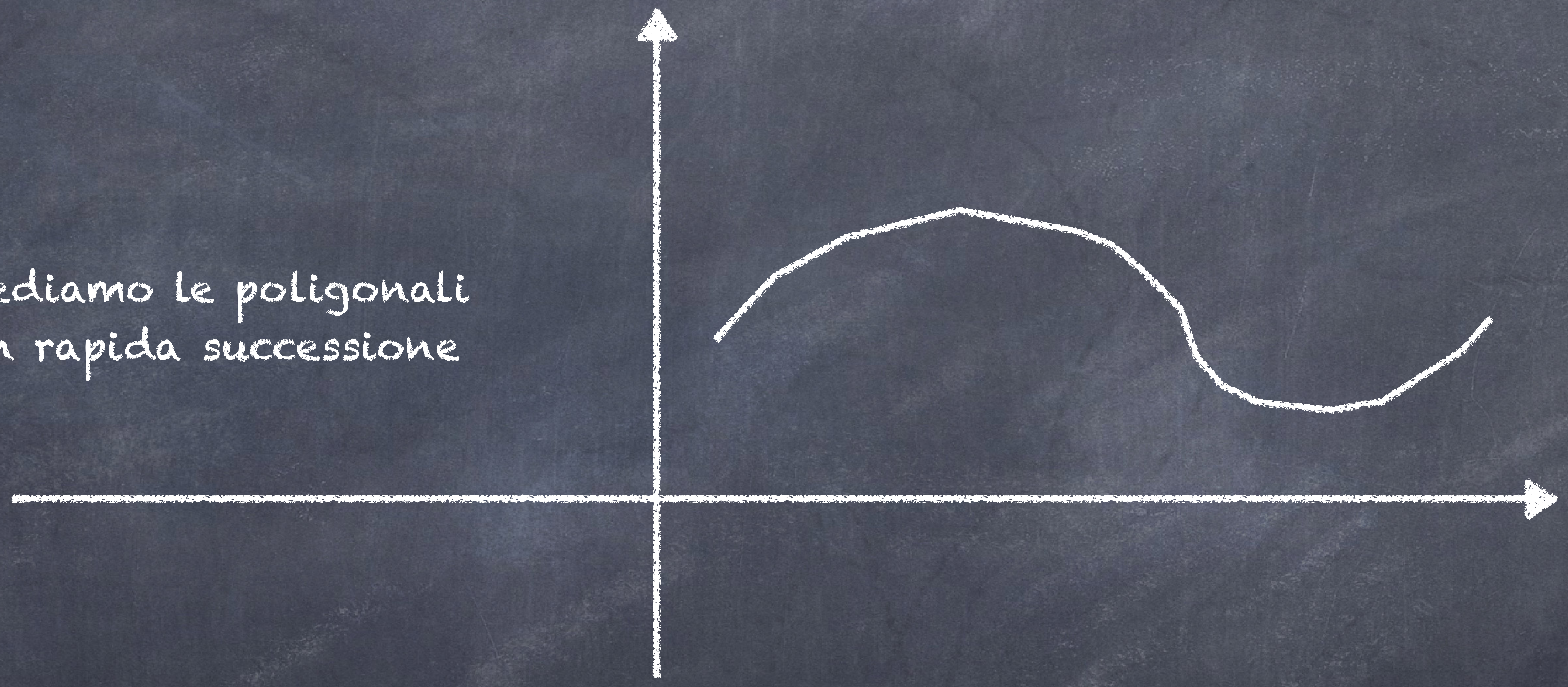
Curve e superfici

Vediamo le poligonali
in rapida successione



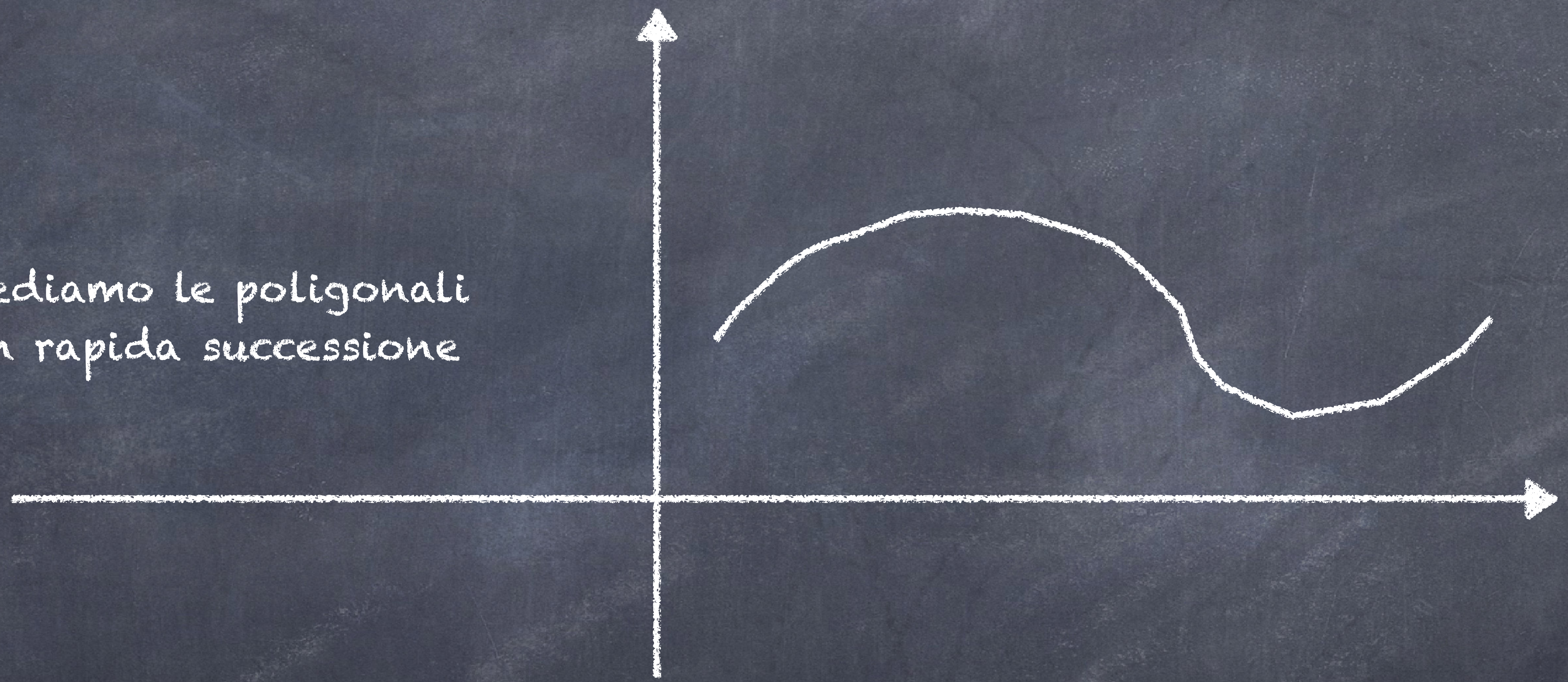
Curve e superfici

Vediamo le poligonali
in rapida successione



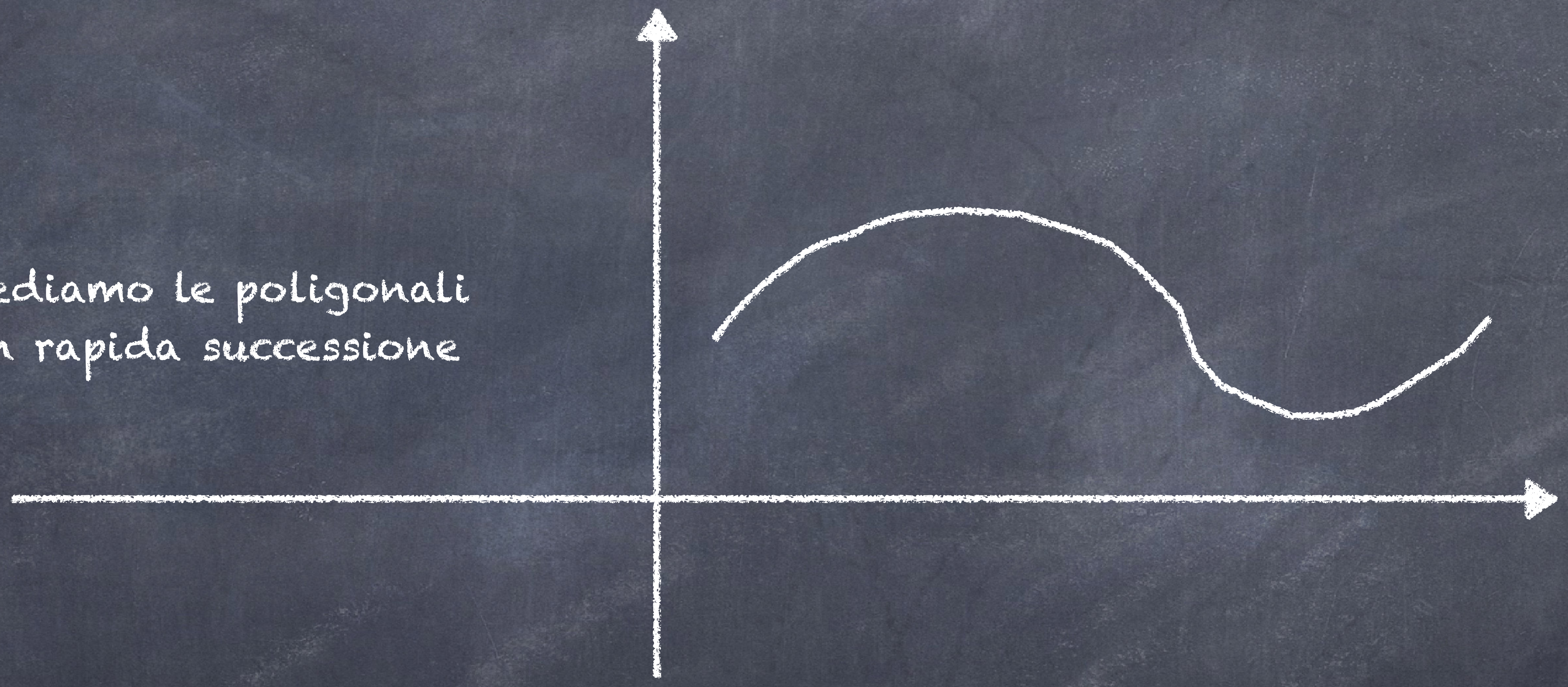
Curve e superfici

Vediamo le poligonali
in rapida successione

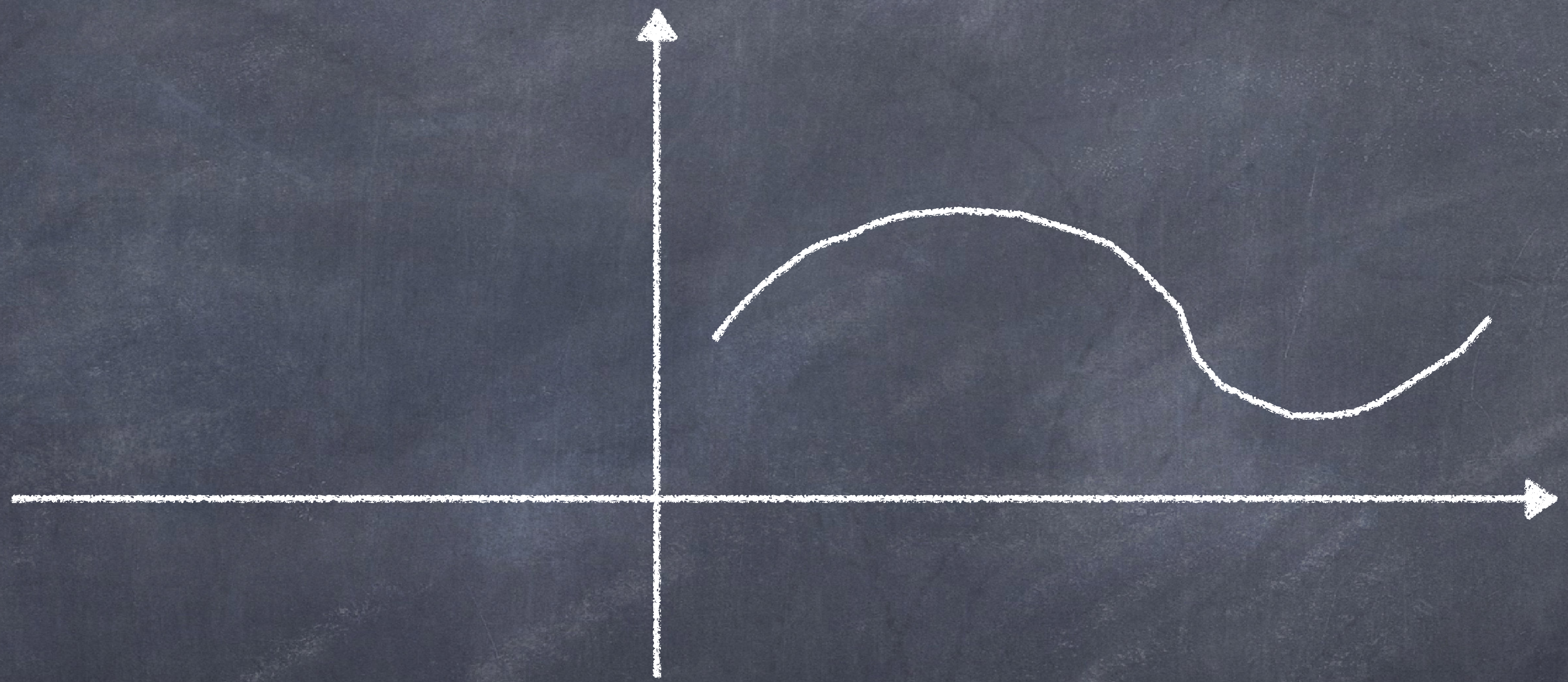


Curve e superfici

Vediamo le poligonali
in rapida successione



Curve e superfici



Spingendo questo processo al limite, è ragionevole definire la lunghezza proprio come il limite delle lunghezze di queste poligonali (ammesso che esista e sia finito)

Curve e superfici

E se operassimo allo stesso modo per definire l'area di una superficie?

Curve e superfici

E se operassimo allo stesso modo per definire l'area di una superficie?

Il tentativo di fornire una buona definizione di area usando questo metodo miseramente fallisce.

Curve e superfici

- Tema di tesi: il paradosso della lanterna di Schwarz

Un cilindro con arbitrario raggio di base ed arbitraria altezza ha "area" infinita.

Equazioni differenziali

Definizione (un po' rozza, ma ho poco tempo)

Una equazione differenziale ordinaria del primo ordine in forma normale si presenta come segue

$$y' = f(x, y)$$

ed una soluzione è ogni funzione $y : I \to \mathbb{R}$ derivabile per cui $y'(x) = f(x, y(x))$.

Equazioni differenziali

In maniera similare si definiscono le equazioni differenziali ordinarie di ordine n in forma normale

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1})$$

e...

Equazioni differenziali

...i sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in forma normale

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \cdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

Equazioni differenziali

Tali sistemi si possono scrivere nella forma più compatta

$$y' = f(x, y)$$

dove $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ e y sta per $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Equazioni differenziali

Quando alla soluzione è richiesto anche che al suo grafico appartenga uno specifico punto allora si ha

$$(c)\ \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_o) = y_0 \end{cases}$$

noto come problema di Cauchy.

Equazioni differenziali

Quando la funzione f possiede particolari proprietà, vi sono tecniche che consentono di risolvere esplicitamente il problema.

Equazioni differenziali

Quando la funzione f possiede particolari proprietà, vi sono tecniche che consentono di risolvere esplicitamente il problema.

Altrimenti…

Equazioni differenziali

- Tema di tesi: metodi qualitativi nello studio delle EDO

Si determinano le proprietà principali della/delle eventuali soluzioni "a priori" senza risolvere esplicitamente il problema

Serie di Fourier

Definizione (molto rozza, ma il tempo è finito)

Assegnata una funzione f periodica di periodo T con alcune buone proprietà, esiste una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2n\pi x/T) + b_n \sin(2n\pi x/T),$$

in cui gli a_n ed i b_n sono legati ad f da una opportuna relazione, che converge ad f (in qualche senso). Essa si dice "serie di Fourier di f"

Serie di Fourier

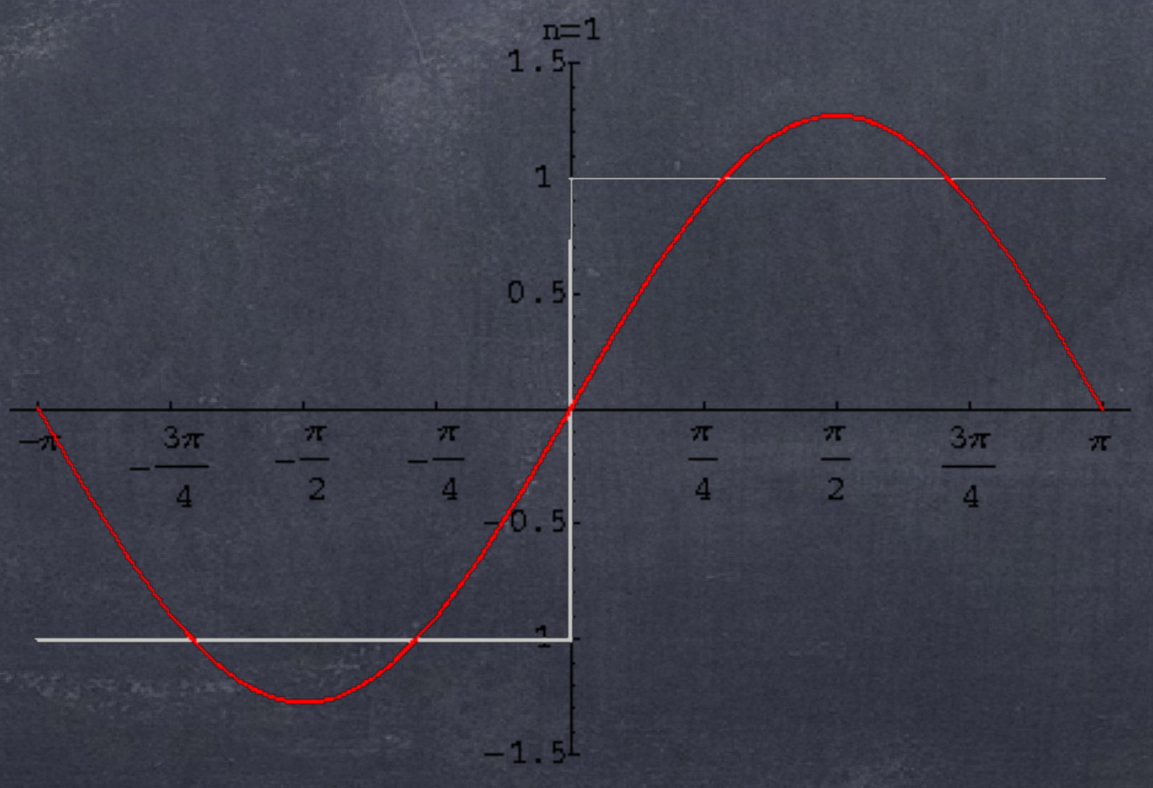
In particolare, se la funzione in questione è la così detta "funzione d'onda" definita come segue

$$f(x)\begin{cases} -1 & \text{se } k\pi \le x < (k+1)\pi \\ 1 & \text{se } (k+1)\pi \le x < (k+2)\pi \end{cases}, \; k \in \mathbb{Z}$$

si osserva che essa è periodica di periodo 2π e la sua serie di Fourier converge puntualmente ad essa.

Serie di Fourier

Tuttavia, facendo tendere n ad infinito, in prossimità dei punti di discontinuità si osserverà che la somma parziale n-esima di Fourier esibisce sia da destra che da sinistra una "sovraelongazione" di ampiezza che non tende a zero!



Serie di Fourier

- Tema di tesi: fenomeno di Gibbs

Si studia questo strano fenomeno,
le sue conseguenze indesiderate
nella teoria dei segnali e come rimuoverlo