Analisi I
e Analisi II

Anna Avallone e Paolo Vitolo

Giornata di Orientamento sulle Tesi di Laurea,
1 marzo 2024

Approfondimenti di argomenti di Analisi I e II

- La funzione Gamma di Eulero
- Irrazionalità di π
- Continuità uniforme
- Integrale generalizzato in più variabili
- Elementi di calcolo delle variazioni

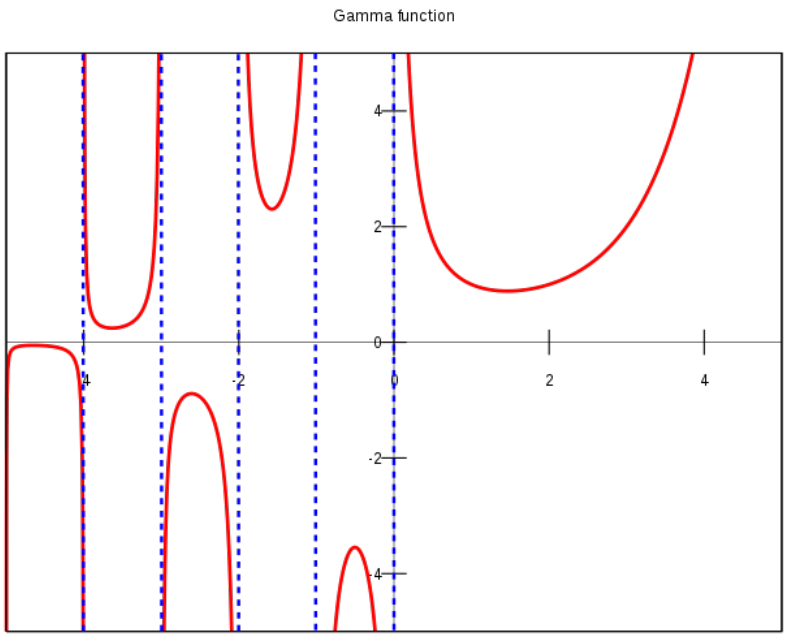
La funzione Gamma di Eulero

Per ogni $z \notin \{0, -1, -2, \ldots\}$, è

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Per ogni x reale positivo è anche

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$



Si ha sempre $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, da cui $\Gamma(k+1) = k!$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

La funzione Γ si incontra in molti ambiti della matematica, della fisica e del calcolo delle probabilità.
Ad esempio, il volume della sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$ è $V_n = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$.

Irrazionalità di π

- È vero che π è irrazionale?
  Cioè: è vero che non esistono p, q interi tali che $\pi = \dfrac{p}{q}$?

  Risposta: Sì. [Lambert (1761), Hermite, Cartwright, Niven, Bourbaki, Laczkovich.]

- È vero che π è trascendente?
  Cioè: è vero che non esiste nessun polinomio P a coefficienti interi tale che $P(\pi) = 0$?

  Risposta: Sì. [Lindemann (1882).]

- È vero che π è ricco (in base 10)?
  Cioè: è vero che la rappresentazione decimale di π contiene qualunque sequenza finita di cifre?

  Risposta: Non si sa (ancora).

Continuità uniforme

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
Si dice che una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ è uniformemente continua se
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in A \quad \big[\, \|y-x\| < \delta \implies \|f(y)-f(x)\| < \varepsilon \,\big]$.

Le funzioni uniformemente continue conservano le successioni convergenti e i sottoinsiemi limitati.

Teorema

Ogni funzione uniformemente continua $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ possiede un'unica estensione a $\overline{A}$.
Cioè esiste un'unica $\bar{f}\colon \overline{A} \to \mathbb{R}^m$ uniformemente continua e tale che $\bar{f}(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$.

Integrale generalizzato in più variabili

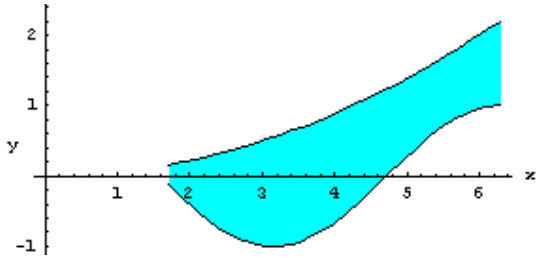
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ *non negativa* e tale che la sua restrizione a ogni sottoinsieme compatto di A sia misurabile. Poniamo

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{ \int_K f(x)\,\mathrm{d}x \;\middle|\; K \subseteq A \text{ compatto} \right\};$$

diremo che f è integrabile in senso generalizzato se $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$.

Per una f a segno variabile si definiscono $f_+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ e $f_- = \frac{1}{2}(|f| - f)$; f si dice integrabile in senso generalizzato se lo sono sia f_+ che f_- e, in tal caso, si pone

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A f_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_A f_-(x)\,\mathrm{d}x.$$



Se A è limitato e f è limitata, si ritrova l'usuale integrale di Riemann.

Elementi di calcolo delle variazioni

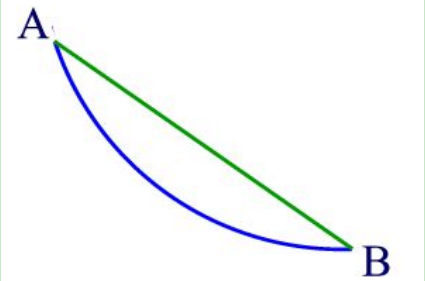
Il tipico problema che affronta il calcolo delle variazioni è la ricerca del massimo o del minimo di funzionali del tipo

$$I(u) = \int_a^b f\big(x, u(x), u'(x)\big)\,\mathrm{d}x,$$

al variare di u (funzione di una variabile reale) in un dato insieme $\mathcal{U}$.

Esempio: la brachistocrona

Un punto materiale, soggetto solo alla gravità, si trova nella posizione A. Determinare il percorso che deve seguire per arrivare nella posizione B nel più breve tempo possibile.



Sia $u(x)$, per $x \in [0, 1]$, una curva da A a B, e sia v_0 la velocità in A.

Il tempo impiegato è $T(u) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1 + \big(u'(x)\big)^2}{v_0 + 2gu(x)}}\,\mathrm{d}x,$

dove g è l'accelerazione di gravità.